

تقييم أداء القشريات الأسطوانية باختلاف المعادلة الرياضية للمولد العرضي

د.م. ميرنا سعود⁽¹⁾

الملخص

المنشآت القشرية هي منشآت هندسية ذات أهمية كبيرة نظراً لجمالها المعماري، وإمكانيتها تغطية مساحات كبيرة دون أعمدة، وتعدّ القشريات الاسطوانية بشكل خاص من المنشآت القشرية التي يكثر استخدامها حالياً في تغطية المباني الصناعية لاستخدامات متعددة، ويختلف سلوك القشريات الاسطوانية باختلاف المعادلة الرياضية التي تنظم الألياف العرضية للقشرية. أعطيت خلال هذا البحث معادلات رياضية مختلفة للمولد العرضي، كمعادلة قوس من دائرة، أو قطع مكافئ، أو معادلة قطع ناقص، أو سكلونيد، ودرست تحولات القوى الداخلية في القشرية باختلاف المعادلة الرياضية، ونظمت هذه التحولات من خلال برنامج حاسوبي خاص بالقشرية الاسطوانية وضع لحساب القوى الداخلية، ثم وضعت النتائج في أربعة جداول، وحلّت النتائج للوصول إلى النسبة المثلى بين مجاز القشرية وارتفاع القبة، وذلك لكل منحى رياضي على حدة، بحيث تكون الإجهادات أقل ما يمكن وكمية المواد المستخدمة في حدها الأدنى، وتبين النتائج المنحنى الرياضي الذي يفضل استخدامه في تغطية القاعات الكبيرة على شكل قشرية اسطوانية.

الكلمات المفتاحية: قشرية اسطوانية، مولد عرضي، مولد طولي، القوى الداخلية، ارتفاع القبة.

⁽¹⁾ قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة دمشق.

Evaluating the performance of the cylindrical Shell for deffernt mathematical Equation of the trangential fiber

Dr. Mirna saood⁽¹⁾

Abstract

Shell structurals are a very great importance buildings, due to their architecural beauty and its potential to cover large areas without columns .

Particularly cylindrical shell which frequently used in industrial buildings for multiple uses.

Different behavior of cylindrical shells according to the mathematical equation governing the tangential fiber .

In this research it was be given a different mathematical equations , such as giving the equation of circle, or cut equivalent, ellipse, and other equations for the tangetial fiber, and then have a study of the transformation of the internal forces in the shell , then it was developed a computer programme paticular to calculate the internal forces in cylindrical shell , and organized the results hn four tables.

In this research it was to determine the best ratio between the span and the height of the cylindrical shell, and determine the best curve can be used in

Cylindrical shell.

Keywords: Shell- height of the shell, span of the shell- cylindrical-intrnal force – meridianl and tangential forces.

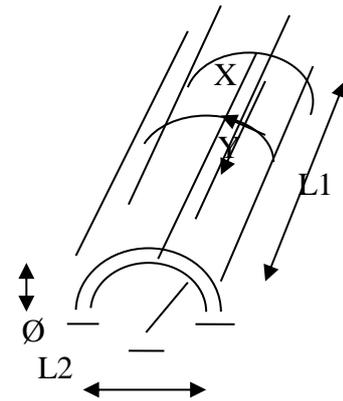
⁽¹⁾ Department of structural engineering, Faculty of Civil Engineering, Damascus University.

1- المقدمة:

المنشآت القشرية الخفيفة هي منشآت فراغية ذات سماكة صغيرة نسبة إلى أبعادها الأخرى، وهي عبارة عن سطوح منحنية تستخدم عادة لتغطية القاعات الكبيرة دون أعمدة لضرورات فنية، وهناك العديد من المنشآت العالمية المنفذة من قشريات رقيقة خلال السنوات القليلة الماضية، وهي تعدّ صرحاً معمارياً جميلاً جداً، وتتميز بذلك عن البناء الهندسي العادي، ويمكن تنفيذها من مواد هندسية كالخرسانة المسلحة، والفولاذ، والبلاستيك.

تتميز القشريات هندسياً بتداخل عمل القوى الداخلية الناتجة في الألياف المولدة للقشرية تحت تأثير الحمولات الخارجية المطبقة؛ مما يساعد في انخفاض الإجهادات المتولدة في نقاط القشرية، ومما يعطي حرية كبيرة للمصمم في اقتراح شكل المنشأ، والفراغات المحجوزة به، والوفر الكبير في كمية المواد اللازمة لتنفيذه.

تختلف القشريات حسب المعادلة الرياضية التي ترسمها ألياف القشرية فمنها القشريات الكروية، والقشريات المخروطية، والقشريات الأسطوانية وغيرها العديد من القشريات.



الرموز والمصطلحات المستخدمة:

- L_1 : طول القشرية
 L_2 : مجاز القشرية
 F : ارتفاع القشرية
 t : سماكة القشرية، وهذه السماكة ثابتة على القشرية كلّها
 Φ : زاوية توليد نقاط الليف العرضي.
 r : نصف قطر انحناء المولد العرضي.
 X : المحور الإحداثي المماس لليف الطولي.
 Y : المحور الإحداثي المماس لليف العرضي.
 Z : المحور الإحداثي الناظم على سطح القشرية.
 N_1 : القوة المحورية المتولدة في الليف الطولي.
 N_2 : القوة المحورية المتولدة في الليف العرضي.
 T : قوة القص المتولدة في سطوح القطع.
 P_x : مسقط الحمولة الخارجية على المحور X .
 P_y : مسقط الحمولة الخارجية على المحور Y .
 P_z : مسقط الحمولة الخارجية على المحور Z .
 g : الوزن الذاتي للقشرية.
 Φ_1 : زاوية بداية التقوس.

هدف البحث: إيجاد علاقة أمثلية بين سماكة القشرية الاسطوانية وارتفاع القبة، بحيث تكون الإجهادات أقل ما يمكن، وكميات المواد المستخدمة اقتصادية، وكذلك إيجاد المعادلة الرياضية الفضلى للألياف العرضية بحيث تكون الإجهادات في حدها الأدنى مع اقتصادية التصميم.

2- الفرضيات المستخدمة:

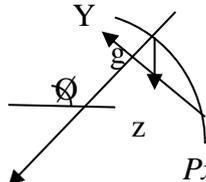
إن القشريات كمنشآت هندسية تتمتع بالعمل القوسي الفراغي، لذلك فالقوى الداخلية المتولدة في أليافها هي قوى محورية (N_1, N_2)، والنظرية المستخدمة في دراسة المنشآت القشرية هي نظرية ممبران (Membran theory of shells).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S} \left(N_1 \cdot \frac{K}{\sin^3 \Phi} \right) + \frac{\partial T}{\partial cl} + Px.k. \frac{1}{\sin^3 \Phi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial S} \left(T \cdot \frac{K}{\sin^3 \Phi} \right) + \frac{\partial N1}{\partial cl} + Py.k. \frac{1}{\sin^3 \Phi} &= 0 \\ N_2 + Pg. \frac{K}{\sin^3 \Phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (7)$$

4- إيجاد القوى الداخلية تحت تأثير الوزن

الذاتي:

إن الوزن الذاتي (g) له مساقط على المحاور الإحداثية للقشرية ويمكن إيجادها كما يأتي:



$$\left. \begin{aligned} Px &= 0 \\ Py &= -g. \cos \Phi \\ Pg &= +g. \sin \Phi \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

بإبدال بالمعادلات (8) المعادلات (1) وإجراء التكامل يتم الحصول على قيم القوى الداخلية في قشرية أسطوانية ذات دليل دائري.

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -g.r. \sin \Phi \\ T &= 2g. \cos \Phi \left(S^1 - \frac{L_1}{2} \right) \\ N_2 &= g. \frac{\sin cl.S^1}{r} (S^1 - L_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (9)$$

كذلك بإبدال بالمعادلات (8) المعادلات (3) وإجراء التكامل يتم الحصول على قيم القوى الداخلية في قشرية أسطوانية ذات دليل قطع مكافئ.

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -g.k. \frac{1}{\sin^2 \Phi} \\ T &= -g. \cos \Phi \left(S^1 - \frac{L_1}{2} \right) \\ N_2 &= \frac{-g. \sin^4 \Phi.S^1}{2K} (S^1 - L_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

المعادلات العامة للقشريات الأسطوانية ذات الدليل الدائري:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N1}{\partial S} .r + \frac{\partial T}{\partial \Phi} + pn.r &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial S} .r + \frac{\partial N}{\partial \Phi} + py.r &= 0 \\ N2 + pg.r &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

3- استنتاج المعادلات العامة للقشرية

الأسطوانية ذات الدليل قطعاً مكافئاً:

إذا كان دليل القشرية الأسطوانية قطعاً مكافئاً معادلته من الشكل:

$$\mu^2 = 2K\xi \dots\dots (2)$$

إذ k ثابت القطع

إن نصف قطر التقوس r للقشرية يصبح غير ثابت ويؤخذ من المعادلة:

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{3/2}}{\partial^2 \xi} \dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mu} = tgB = \frac{\mu}{K} \dots\dots (4)$$

ويعد المشتق الأول لمعادلة القطع هو ميل المماس في كل نقطة من نقاط المولد العرضي للقشرية.

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial \mu^2} = \frac{1}{K} \dots\dots (5)$$

بإبدال المعادلة (4)، (5) في المعادلة (3) يتم الحصول على معادلة نصف قطر التقوس r بدلالة k:

$$r = K. \frac{1}{s.n^3 \Phi} \dots\dots (6)$$

ومن ثم تصبح المعادلات (1) على الشكل الآتي:

5- استنتاج تحولات القوى الداخلية في حالة

سيكلويد:

لما كانت المعادلة الرياضية للسيكلويد من الشكل

$$r = c.\sin\Phi \dots (11)$$

وبإبدال المعادلة (11) والمعادلات (8) بالمعادلات

(1) أمكن الحصول على قيم القوى الداخلية في القشرية ذات دليل سيكلويد.

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -g.c.\sin^2 \Phi \\ T &= 3g.\cos \Phi \left(S^1 - \frac{L_1}{2} \right) \\ N_2 &= \frac{3g.S^1}{2c} (S^1 - Li) \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

6- استنتاج القوى الداخلية في القشرية في

حالة الدليل بشكل قطع ناقص:

بالطريقة نفسها وبإيجاد r نصف قطر الناقص إذا كان

دليل القشرية قطع ناقص يكون:

$$r = \frac{a^2.b^2}{(a^2.\cos^2 \Phi + b^2.\sin^2 \Phi)^{3/2}} \dots (13)$$

إذ:

a: القطر الكبير للقطع الناقص.

b: القطر الصغير للقطع الناقص.

ومن ثمَّ بإبدال ب(13) و(8) المعادلات (1) أمكن

الحصول على القوى الداخلية في القشرية التي دليلها قطع

ناقص:

$$\left. \begin{aligned} I &= a^2.\cos^2 \Phi + b^2.\sin^2 \Phi \\ N_1 &= -g.\frac{a^2.b^2}{I^{3/2}}.\sin \Phi \\ T &= -g.\frac{2a^2 + (a^2 - b^2)\sin^2 \Phi}{I}.\cos \Phi \left(\frac{L_1}{2} - \zeta \right) \\ N_2 &= -1.5g.S(L_1 - \zeta)\frac{a^2.b^2 - I^2}{a^2.b^2\sqrt{I}} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

7- البرنامج المستخدم:

بالاعتماد على ما سبق توضع خوارزمية بلغة vigital basic لحساب القشريات الأسطوانية ذات الدليل بشكل دائرة وقطع مكافئ وسيكلويد وقطع ناقص، إذ يقوم البرنامج بحساب القوى الداخلية.

يتميز البرنامج بسهولة مدخلاته (input) مقارنة بالبرامج الإنشائية الأخرى، ولكنه خاص فقط بالقشريات

الأسطوانية، ويعطي البرنامج القوى الداخلية في القشرية (N1,N2) كمخرجات للبرنامج (output) مع تغير t,

فذلك بإعطاء قيم ثابتة لأبعاد القشرية $L_2=20m$, $L_1=50m$

في حال كانت L_2 ثابتة يمكن حساب f من العلاقات التالية، وذلك تبعاً لدليل القشرية:

- القشرية ذات الدليل الدائري

$$f = \frac{L_2}{2} \left(\frac{1 - \sin \Phi_0}{\cos \Phi_0} \right) \dots (15)$$

- القشرية ذات الدليل قطع مكافئ

$$f = \frac{L_2}{4} \left(\frac{\cos \Phi_0}{\sin \Phi_0} \right) \dots (16)$$

- القشرية التي دليلها سيكلويد

$$f = \frac{L_2}{2} \left(\frac{\cos \Phi_0}{\sin \Phi_0} \right) \dots (17)$$

القشرية التي دليلها قطع ناقص

$$f = b - \frac{L_2}{2}.t_g \Phi_0 \dots (18)$$

تدخل المعادلات (15)، (16)، (17)، (18) ضمن

البرنامج، وكذلك المعادلات (1)، (7)، (10)، (14) مع

إعطاء قيم مختلفة لسماكة القشرية، وتنظّم النتائج في أربعة

جداول وفقاً لما يأتي:

الجدول (1): القشرية الاسطوانية بدليل دائري

t _{cm}	f _(m)	f/t	L ₂ /f	g KN/m ²	N1 KN/m	T KN/m	N ₂ - KN/m	σ _{max} mpa
8	4,14	51,75	4,83	2	-28,28	-70,71	-88,4	-1,11
8,5	4,14	48,71	4,83	2,125	-30,05	-75,13	-93,93	-1,11
9	4,14	46	4,83	2,25	-31,82	-79,55	-99,45	-1,11
9,5	4,14	43,6	4,83	2,375	-33,58	-83,97	-104,98	-1,11
10	4,14	41,4	4,83	2,5	-35,35	-88,39	-110,5	-1,11
10,5	4,14	39,43	4,83	2,625	-37,12	-92,81	-116,03	-1,11
11	4,14	37,64	4,83	2,75	-38,89	-97,23	-121,55	-1,11
11,5	4,14	36	4,83	2,875	-40,65	-101,65	-127,08	-1,11
12	4,14	34,5	4,83	3	-42,42	-106,06	-132,6	-1,11
12,5	4,14	33,12	4,83	3,125	-44,19	-110,48	-138,13	-1,11
13	4,14	31,85	4,83	3,25	-45,96	-114,90	-143,65	-1,11
8	5,77	72,13	3,47	2	-23,1	-86,6	-108,23	-1,35
8,5	5,77	67,88	3,47	2,125	-24,54	-92,02	-114,90	-1,35
9	5,77	64,11	3,47	2,25	-25,99	-103,52	-129,36	-1,35
9,5	5,77	60,74	3,47	2,375	-27,43	-122,93	-153,62	-1,35
10	5,77	57,7	3,47	2,5	-28,88	-153,66	-192,02	-1,35
8	5	62,5	4	2	-25,04	-79,86	-99,5	1,24
8	3,64	45,5	5,5	2	-31,12	-64,3	-80,33	1

ملحوظات على الجدول (1):

القشرية الأسطوانية بدليل دائرة

• لا دخل لسماكة القشرية بالإجهاد الناظمي الأعظمي المتولد ومن ثم للحصول على تصميم اقتصادي يفضل استخدام السماكة الصغرى الممكنة للتنفيذ، لأن السماكة الصغرى تعني أقل كمية مستخدمة من مواد التنفيذ ووزن أقل للقشرية مع لحظ ضرورة بقاء القشرية رقيقة، أي:

$$\frac{1}{1000} \leq \frac{t}{r} \leq \frac{1}{20}$$

• بزيادة ارتفاع القبة (f) صغرت قيمة القوى في الألياف الطولية، وزادت قيم قوى القص، وكذلك زادت القوى في الألياف العرضية، وزاد ثم من الإجهاد الناظمي الأعظمي المطبق على الألياف القشرية ولكن في الوقت نفسه وعندما ينقص ارتفاع القبة إلى حد معين تصبح القشرية معرضة لعزوم انعطاف فضلاً عن القوى الناظمية، وهذا غير مفضل، لذلك فإن القيمة المثلى بين المجاز وارتفاع القبة هي: $L_2/f=4$ ، عندها تكون العزوم معدومة، والإجهادات الناظمية التي تخضع لها القشرية صغيرة، كما أن القوى المنقولة إلى الجوائز المحيطة بالقشرية كردود أفعال أقل ما يمكن.

الجدول(2): القشرية بدليل القطع المكافئ

t_{cm}	$f_{(m)}$	f/t	L_2/f	g	$N1$	T	N_2	σ_{max} mpa
8	5	62,5	4	2	-42,5	-35,36	-58,2	0,74
8,5	5	58,82	4	2,125	-45,16	-37,57	-62,50	0,74
9	5	55,56	4	2,25	-47,81	-39,78	-66,18	0,74
9,5	5	52,63	4	2,375	-50,47	-41,98	-69,85	0,74
10	5	50	4	2,5	-53,25	-44,2	-73,50	0,74
10,5	5	47,62	4	2,625	-55,78	-46,41	-77,20	0,74
11	5	45,45	4	2,75	-58,83	-48,62	-85,55	0,78
11,5	5	43,48	4	2,875	-61,09	-50,83	-88,22	0,77
12	5	41,67	4	3	-63,75	-53,03	-91,91	0,77
12,5	5	40	4	3,125	-66,41	-55,24	-95,60	0,76
13	4	38,46	4	3,25	-69,06	-57,45	-98,82	0,76
8	4	50	5	2	-42,5	-31,47	-62,50	0,78
8,5	4	47,1	5	2,125	-45,16	-33,43	-66,18	0,78
9	4	44,44	5	2,25	-47,81	-37,61	-69,85	0,77
9,5	4	42,1	5	2,375	-50,47	-44,66	-73,50	0,70
10	4	40	5	2,5	-53,125	-55,83	-79,50	0,74
8	3	37,5	6,67	2	-42,5	-25,75	-58,82	0,74
8	3,64	45,5	5,5	2	-49,67	-31,47	-41,56	0,62

- ملحوظات على الجدول (2)
- بزيادة قيم ثابت القطع المكافئ (k) تزداد القوى في الألياف العرضية، وكذلك نقل قيم قوى القص، ومن دراسة تحولات ثابت القطع تبين أن القيمة الأمثلية $10 \leq k \leq 15$.
 - بزيادة ارتفاع القبة مع بقاء المجاز نفسه تتغير القوى في الألياف الطولية والعرضية تغيراً طفيفاً، لذلك لا توجد نسبة أمثلية هنا في حالة الدليل قطع مكافئ.
 - لا تؤثر سماكة القشرية في قيم الإجهادات الناعمية، ويفضل أن تكون السماكة أقل ما يمكن للحصول على تصميم اقتصادي.

الجدول (3): النتائج في القشرية ذات الدليل بشكل سيكلونيد.

t_{cm}	$F_{(m)}$	f/t	L_2/f	g	$N1$	T	N_2	σ_{max}
8	10	125	2	2	-40	-106,1	-93,75	1,17
8,5	10	117,6	2	2,125	-42,5	-112,73	-99,61	1,17
9	10	111,1	2	2,25	-45	-119,36	-105,5	1,17
9,5	10	105,3	2	2,375	-47,5	-126	-111,3	1,17
10	10	100	2	2,5	-50	-132,62	-117,2	1,17
10,5	10	95,21	2	2,625	-52,5	-139,26	-123,05	1,17
11	10	90,91	2	2,75	-55	-145,98	-128,9	1,17
11,5	10	86,90	2	2,875	-57,5	-152,52	-134,8	1,17
12	10	83,33	2	3	-60	-159,15	-140,6	1,17
12,5	10	80	2	3,125	-62,5	-165,78	-146,48	1,17
13	10	76,92	2	3,25	-65	-172,41	-152,34	1,17
8	5,77	72,1	3,47	2	-46	-75	-81,5	1
8,5	5,77	67,88	3,47	2,125	-48,9	-79,7	-86,61	1
9	5,77	64,11	3,47	2,25	-51,75	-84,4	-91,7	1
10	5,77	57,7	3,47	2,5	-57,5	-93,7	-101,9	1
8	8,4	104,9	2,38	2	-40,6	-96,4	-92,4	1,15

- ملحوظات على الجدول (3) القشرية دليل سكلونيد: إن الارتفاعات في القشرية على شكل سكلونيد عالية وهذا غير مرغوب به عملياً.
- زادت قوى القص زيادة كبيرة.
- سماكة القشرية لا تؤثر في الإجهاد الناظمي الذي تتعرض له ألياف القشرية، ومن ثمّ يفضل أن تكون السماكة صغيرة للحصول على تصميم اقتصادي.
- زيادة (f) تنقص القوى في الألياف الطولية وتزداد قوى القص وتزداد القوى في الألياف العرضية، لذلك في مثل هذه القشرية يفضل أن تكون $\frac{L_2}{f} = 3$.
- وتعطي هذه النسبة أقل إجهاد ناظمي وأقل ردود أفعال على الجوائز التي تستند إليها القشرية.

الجدول (4): القشرية ذات الدليل على شكل قطع ناقص

t_{cm}	$F_{(m)}$	f/t	L_2/f	g	N_1	T	N_2	δ_{man}
8	4	50	5	2	-31,25	-99,5	-67,5	0,84
9	4	44,44	5	2,25	-35,16	-112	-75,94	0,84
10	4	40	5	2,5	-39,1	-124,4	-84,4	0,84
11	4	36,4	5	2,75	-43	-136,8	-92,81	0,84
12	4	33,3	5	3	-46,9	-149,3	-101,25	0,84
8	4	50	5	2	-29,6	-80,7	-17,34	0,37
8	4	50	5	2	-29,2	-72,9	-105,56	0,36
8	3	37,5	6,67	2	-39,2	-53,1	-91,84	1,14
8	5	62,5	4	2	-26,7	-97	-186	2,3

ملحوظات على الجدول (4) القشرية على شكل قطع ناقص السماكة لا تؤثر في الإجهادات الناظمية التي تتعرض لها القشرية، لذلك يفضل أن تكون في حدها الأدنى الذي يسمح به تنفيذ القشرية.

نتائج وتوصيات:

تبيّن من خلال تغيير قيم قطر القطع الصغير (b)، ونصف قطر القطع الكبير (a) أن النسبة الأمتلية لنصفي القطرين هي $\frac{a}{b} = 1.5$ ، وهذه النسبة تعطي ارتفاعاً للقبّة (f) أفضل ما يمكن، إذ إنّ تغيّر هذه النسبة يدخل في العلاقات (14)، والعلاقة (18) الداخلة في حساب القوى المتولدة في ألياف القشرية.

زيادة ارتفاع القبّة (f) تنقص القوى في الألياف الطولية، وتزداد قوى القص، وكذلك تزداد القوى المحورية في الألياف العرضية، وتكون النسبة المثلى

من مقارنة النتائج تبيّن أنّ أفضل معادلة رياضية لتنفيذ سقوف الهنغارات على شكل قشرية أسطوانية هي معادلة القطع الناقص، إذ إنّها تعطي أقل إجهادات ناظمية مطبقة، وأقل ردود أفعال على جوائز القشرية مع بقاء إجهادات القص ضمن الحدود التي تتحملها مادة البيتون، إنّ معادلة القطع الناقص تعطي أفضل ارتفاعات لقبّة القشرية، وأقل كمية من البيتون والحديد المستخدم لتنفيذ القشرية مع جوائزها.

References

- 1- TimoShenko S. and woinowsky – Krieger. S., Theory of plates and shells. McGraw- Hill, New York, 1959.
- 2- Leissa A.w., vibration of shell. NASA sp- 288, washigton, DC, 1973.
- 3- Novozhilov, V.V., theory of thin Elastic Shells znd edn, P. Noord hoff, Groningey, 1964.
- 4- Flügge, w, stresses in shell, znd edn, Spriger-Verlag, Berlin, 1962.
- 5- Kelkar V.S. and Sewell, R.t., Analysis & Design of shell structures, prentice- Hall, Englewood Cliffs. New Jersey, 1987.
- 6- Gere J.M. and Timoshenko, S'.P., Mechanics of Materials, 4th edn, PWS publishing company, Boston, 1997.