

نمذجة ومحاكاة الظواهر الكهربية في الأوساط غير الإيزوتروبية

م. نذير شوري

د. سلام محمود

د. محمد موسى

الملخص

تناول هذا البحث نمذجة التفاعلات الكهربية في الوسط غير الإيزوتروبي ومقارنته مع الوسط الإيزوتروبي. تمتاز الأوساط غير الإيزوتروبية بخصائص كهربية مختلفة في الأبعاد الفراغية تبعاً للإتجاه مقارنة مع الأوساط الإيزوتروبية ذات الخصائص المستقلة عن الإتجاه. تحدث ظواهر مختلفة للأمواج الكهربية في هذه الأوساط من إنتشار وتبعثر وإنعكاسات وإنكسارات متعددة، ويشكل ذلك صورة معقدة ومركبة للظواهر المرافقة لهذا التفاعل، مما ينعكس على صيغة معادلات ماكسويل وحلولها. تلعب الكهربية المحوسبة ومنها تقنية الفرق المتناهي في المجال الزمني Finite Difference Time Domain -FDTD دوراً أساسياً في محاكاة هذه الظواهر ودراستها وتحليلها، حيث تضيف الخصائص غير الإيزوتروبية تعقيدات في متابعة سلوكية تفاعل هذه الأوساط مع الأمواج الكهربية. تطلبت الدراسة إجراء تعديل على الحلول التقريبية لمعادلات ماكسويل، وتشكيل شبكة الحل الملائمة للخصائص غير الإيزوتروبية في تقنية FDTD. تعكس نتائج البحث حدوث تفاعلات غير نمطية للأمواج الكهربية، وأتاحت متابعة ظواهر إنتشار الأمواج وإنعكاساتها المتعددة وتبعثرها وسرعة إنتشار مركباتها وإستقطابيتها ونمطها الفراغي. تتيح هذه النتائج إمكانية تطبيقها في مجالات هندسية عديدة مثل التحجيب الكهربي وتحليل بنى المواد العازلة وغيرها.

الكلمات المفتاحية: الأوساط الإيزوتروبية، الأوساط غير الإيزوتروبية، الحقول الكهربية، طريقة الفرق المتناهي في المجال الزمني FDTD، البيئة البرمجية CST، الإستقطاب.

Modeling & Simulation of electromagnetic phenomena in anisotropic mediums

Abstract

This paper deals with the modeling of electromagnetic interactions in the anisotropic medium and its comparison with Isotropic medium. Anisotropic media characterized with electrical properties which are varied in the spatial dimensions, depending on the direction compared to isotropic media which are direction independent. Various phenomena occur in these media such as propagation, scattering, reflections and multiple refractions. These constitutes complex view of connected phenomenon with this interaction, which is reflected in Maxwell's equations and their solutions.

Computational electromagnetics, including the Finite Difference Time Domain (FDTD) method, play a key role in modeling and simulation for analyzing these phenomena. Anisotropic properties add difficulties to the interaction of these media with electromagnetic waves. The study required a modification of the approximate solutions of Maxwell's equations, and the formation of the appropriate solution grid for anisotropic properties of FDTD method.

The results of the research produce an atypical interactions of electromagnetic waves, and it gives the possibility to follow the anisotropic electromagnetic wave interaction, wave multiple reflections, scattering, the speed variation of the components, its polarization and its spatial pattern. These results could be applied in some engineering applications e.g. EM shielding, analysis of dielectric materials structures and etc.

Key words: Anisotropic materials, Isotropic materials, electromagnetic Fields, Finite Difference Time Domain FDTD, CST software, Polarization.

المقدمة:

الأوساط في الفراغ والزمن. تلائم البيئة البرمجية CST مثل هذه التقنيات العددية. تعتمد التفاعلات الكهرومغناطيسية مع الأوساط الإيزوتروبية على معادلات ماكسويل للحقل الكهرومغناطيسي بما فيها ظواهر الانتشار والانعكاس والانعكاس [7,16].

تحتاج هذه المعادلات إلى تكيفها مع الأوساط غير الإيزوتروبية المعقدة.

تمتاز الأوساط غير الإيزوتروبية بخصائص كهربائية ومغناطيسية مختلفة ومتباينة وفق المحاور الإحداثية ثلاثية الأبعاد. يؤدي هذا التباين إلى صعوبات كبيرة في حلول معادلات ماكسويل التفاضلية والشعاعية، تجدر الإشارة إلى أهمية دراسة التفاعلات الكهرومغناطيسية في المواد غير الإيزوتروبية.

يهدف هذا البحث إلى متابعة تفاعلات الحقول والأمواج الكهرومغناطيسية في الأوساط غير الإيزوتروبية من خلال النمذجة والمحاكاة ومتابعتها في الفراغ والزمن، استناداً إلى حلول معادلات ماكسويل في الأوساط غير الإيزوتروبية بطريقة FDTD في البيئة البرمجية CST-Computer Simulation Technology.

مشكلة البحث:

تستند دراسة التفاعلات الكهرومغناطيسية ضمن المواد الإيزوتروبية على معادلات ماكسويل وحلولها بمراعاة أن السماحية الكهربائية والنفاذية المغناطيسية والناقلية الكهربائية تشكل عواملاً ثابتة؛ حيث تمثل معادلات ماكسويل معادلات تفاضلية مما يسهل اجراءات الحل من خلال النمذجة والمحاكاة في الفراغ والزمن.

تحتاج معادلات ماكسويل في الأوساط غير الإيزوتروبية إلى موازنتها مع الخصائص المصفوفية (التنسورية) لهذه الأوساط؛ بمراعاة شروطها الحدية. يشكل

تصنيف المواد في التطبيقات الهندسية إلى إيزوتروبية بخصائص ثابتة لا تتغير وفق المنحى؛ من ناقلية نوعية ونفاذية مغناطيسية وسماحية كهربائية (ϵ و μ و σ)؛ وإلى مواد غير إيزوتروبية (يمكن تسميتها بالمواد المتباينة الخصائص وفقاً للمنحى) تكون بخصائص متغيرة تبعاً للاتجاه وتكون في صيغة مصفوفية تدعى بتنصور Tensor أو الموتر (مصفوفة عددية بقيم تابعة للاتجاه).

تعد الخصائص المشار إليها، سمة لأغلب المواد في التطبيقات الهندسية في وقتنا الراهن مثل تقنيات أنصاف النواقل وشاشات الإظهار والهوائيات الحديثة ومولدات التردد العالي ومستقبلاتها والمواد الكريستالية وغيرها.

أثبتت التجربة العملية أن المواد غير الإيزوتروبية يمكن أن تبدي خصائص جديدة غير متوقعة في تفاعلاتها مع الحقول والأمواج الكهرومغناطيسية، كما هو الحال في المواد نصف الناقلة المستخدمة في الدارات المنطقية وفي مختلف المجالات الهندسية بما فيها نظم القياس والحساسات وأجهزة الموبايل وغيرها [1,15,17].

يتعدى قياس وتقدير التفاعلات الكهرومغناطيسية مع البنية الجزيئية أو الذرية، بالتقنيات التقليدية لصعوبة متابعة تغييراتها الدقيقة في الفراغ والزمن. نظراً لاحتمالات تأثير نظام القياس بحد ذاته على دقة المتابعة.

برزت الحاجة إلى التقنيات العددية المحوسبة من أجل التغلب على صعوبات القياس وملاحقة التفاعلات الكهرومغناطيسية في داخل البنى غير الإيزوتروبية في الفراغ والزمن. تتيح هذه التقنيات إمكانية متابعة التفاعلات المذكورة بإختيار بيئات برمجية حديثة مناسبة. ظهرت تقنية الفرق المتناهي في المجال الزمني FDTD لما تمتاز به من إمكانيات في نمذجة ومحاكاة المسائل العملية بأشكال معقدة ومتابعة التفاعلات وعواملها ومحدداتها في جميع

أحادي البعد، أضعف ذلك من احتمالات تطبيقها في الأوساط غير الإيزوتروبية المعقدة [12].

أجريت العديد من الأبحاث أيضاً لاستخدام طريقة FDTD في متابعة التفاعلات الكهروضوئية في الفراغ والزمن مع الأخذ بالحسبان الخصائص غير الإيزوتروبية للأوساط [5,19].

تجدر الإشارة إلى أن التقنيات المذكورة سابقاً اعتمدت على شعاع شدة الحقل الكهربائي التابع لخصائص الوسط، التي تؤدي إلى أبعاد غير منتظمة لخلايا شبكة الحل لـ FDTD.

تمت المعالجة باتخاذ إجراءات لمواءمة معادلات ماكسويل وحلولها للحفاظ على أبعاد متساوية لخلايا Yee (خلية FDTD) في شبكة الحل للوسط غير الإيزوتروبي ذو الخصائص التيسورية، حيث تم الاعتماد على شعاع كثافة التدفق الكهربائي D المستقل عن خصائص الوسط والمطابق في الإتجاه لشعاع الإستقطاب الكهربائي في طول معادلات ماكسويل.

تم تمثيل الخصائص الكهروديناميكية البنيوية للمواد غير الإيزوتروبية بمصفوفات تيسورية للخصائص الكهربائية والمغناطيسية، لشعاع الإزاحة D وشعاع كثافة التدفق المغناطيسي B .

نادراً ما توجد في الواقع العملي مواد بخصائص إيزوتروبية حيث أن أغلبها تكون مواداً غير إيزوتروبية، لذلك سيتم التركيز في هذا البحث على الخصائص غير الإيزوتروبية بمصفوفة تيسورية $[E]$ للسماحية الكهربائية وسنعتبر أن الوسط غير مغناطيسي $\mu_r = 1$.

تجدر الإشارة إلى العلاقة الوثيقة بين شعاع الحقل الكهربائي E وشعاع كثافة التدفق الكهربائي (الإزاحة) D في الوسط الإيزوتروبي والتي تكون خطية والأشعة متسايرة كما في العلاقات التالية [1,5,18]:

ذلك أساساً لوضع النموذج الرياضي لنمذجة هذا التفاعل ومحاكاته بمتابعة التغييرات في الفراغ والزمن.

تتطلب دراسة معادلات ماكسويل في الأوساط غير الإيزوتروبية إيجاد الحل المناسب والتي تتيح نمذجة ومحاكاة هذا التفاعل المعقد على المستويات العيانية والمجهرية. يتناول هذا البحث دراسة تفاعلات الحقول والأمواج الكهروضوئية مع الأوساط غير الإيزوتروبية من خلال نمذجة ومحاكاة حلول معادلات ماكسويل باستخدام طريقة FDTD في البيئة البرمجية CST.

يؤثر في هذه التفاعلات خصائص الوسط وسلوك الحقول والأمواج بما فيها من إنعكاسات متعددة وتبعثر وسرعات إنتشار كل مركبة منها وإستقطابية الموجة ونمطها الحيزي [7,3].

1- الدراسة النظرية والمرجعية:

تنبأ ماكسويل بانتشار الأمواج الكهروضوئية في الأوساط الإيزوتروبية عندما وضع معادلاته في القرن التاسع عشر، شكل ذلك القاعدة العلمية لتطبيقات الهندسة الكهربائية [10,19].

اجريت العديد من الأبحاث لمتابعة التفاعلات الكهروضوئية في الأوساط غير الإيزوتروبية منذ الثمانينيات، حيث قام الباحثان Choi و Hofer عام 1986 بمحاولة أولية لاستخدام طريقة الفرق المتناهي في المجال الزمني للتفاعل الكهروضوئي في وسط غير إيزوتروبي بالطرائق الحسابية التقليدية كبدية عمل في هذا المجال [6].

طبق العالمان Hunsberger و Luebbers طريقة التكرار لتحليل البلازما الممغنطة كمادة غير إيزوتروبية [22].

تحقق العالمان Werner و Akyurtlu من إمكانية تطبيق طريقة FDTD على الأوساط غير الإيزوتروبية أحادية المحور وثنائية المحاور بطريقة تحليل الموجة إلى مركبتين غير مقترنتين تنتشران في وسط مكافئ إيزوتروبي

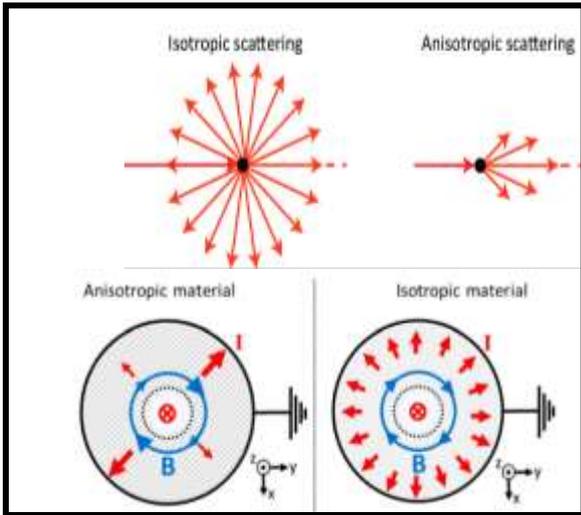
عندها تصبح معادلة الحقل الكهربائي كالتالي:

$$[D] = [\epsilon] \cdot [E] \quad (5)$$

حيث:

[P]	مصفوفة الإستقطاب الكهربائي C/m^2
[D]	مصفوفة شعاع كثافة التدفق الكهربائي D
[E]	مصفوفة شعاع شدة الحقل الكهربائي E
[ε]	مصفوفة السماحية الكهربائية
[X]	مصفوفة قابلية تأثرية المادة Susceptibility

يبين الشكل (1) العلاقة بين شعاعي الإزاحة الكهربائية وشعاع شدة الحقل في المواد الإيزوتروبية وغير الإيزوتروبية، حيث في الوسط غير الإيزوتروبي شعاع شدة الحقل الكهربائي في كل المناحي غير ثابت ولا يتطابق على شعاع شدة الحقل بسبب التباين في الإستقطاب الكهربائي في الإتجاهات المختلفة.



الشكل (1) الحقول في الأوساط الإيزوتروبية وغير

الإيزوتروبية [2]

إنطلاقاً من قانون مصونية الطاقة وبغياب الإمتصاص، ستكون مصفوفة [ε] في المعادلة (2) متناظرة أي أن:

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$$

يتم إختيار المحاور الاحداثية بحيث تتطابق على المحاور البنيوية الفراغية للمادة في المسألة المدروسة، عندئذ تأخذ المعادلة (2) الصورة التالية [18]:

$$D = \epsilon E = \epsilon_0 \epsilon_r E \quad (1)$$

$$= \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + X) E$$

حيث

E:	شعاع شدة الحقل الكهربائي v/m
D:	شعاع الإزاحة C/m^2
ε:	السماحية الكهربائية - F/m
ε ₀ :	8.85x 10 ⁻¹² F/m السماحية الكهربائية للخلاء
ε _r :	السماحية الكهربائية النسبية
P:	الإستقطاب الكهربائي C/m^2
X:	التأثرية الكهربائية للمادة

بعبارات أخرى فإن السماحية الكهربائية ستأخذ قيماً عديدة وحيدة في كل الإتجاهات لأن الوسط إيزوتروبي. وفي الحالة غير الإيزوتروبية ستكون محددات السماحية الكهربائية والناقلية النوعية والمغناطيسية (ε و μ و σ) بخصائص متباينة في الإتجاهات الفراغية المتعددة [11].

في حالة الأوساط غير المغناطيسية فإن شعاع شدة الحقل الكهربائي E سيتغير تبعاً للإتجاه ولن يبقى متساوياً مع شعاع كثافة التدفق الكهربائي D، ستأخذ عندها المعادلة (1) الصيغة المصفوفية التيسورية التالية [18]:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

يعرف التينسور Tensor رياضياً، بأنه مصفوفة عديدة ولكن تتغير قيمها بتغير الإتجاه المدروس، وبالتالي تصف القيم المتغيرة وفقاً للإتجاه [14].

يتضح من المعادلة (2) أنه اصبح لدينا ثلاث معادلات (أي معادلة مصفوفية) في الوسط غير الإيزوتروبي، إزاء معادلة واحدة في الوسط الإيزوتروبي. بمراعاة شعاع الإستقطاب الكهربائي في الإتجاهات المختلفة يمكن التعبير عن شعاع كثافة التدفق الكهربائي في الأوساط غير الإيزوتروبية كما يلي [13,17]:

$$[P] = \epsilon_0 [X] E \quad (3)$$

$$D = [\epsilon] E = \epsilon_0 [\epsilon_r] E = \epsilon_0 (1 + [X]) E \quad (4)$$

لمعادلات ماكسويل	لمعادلات ماكسويل
$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega[\boldsymbol{\varepsilon}]\mathbf{E}$ (7)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H}$ (8)

نحصل بأخذ إعصار شدة الحقل المغنطيسي للمعادلة (7) وإعادة ترتيبها ومراعاة الصيغة المصفوفية للسماحية الكهربائية، على ما يلي [18]:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = j\omega\boldsymbol{\varepsilon}_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

يمكننا من العلاقة (5) إيجاد شدة الحقل الكهربائي في الصيغة المصفوفية كالتالي:

$$\mathbf{E} = [\boldsymbol{\varepsilon}]^{-1} \cdot \mathbf{D} \quad (10)$$

حيث:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]^{-1} = \text{تسور السماحية الكهربائية}$$

يمكن استنتاج المعادلة الموجية للحقل الكهروضوئي اعتماداً على معادلات ماكسويل في الوسط غير الإيزوتروبي كما يلي:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + w^2 \mu[\boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (11)$$

تأخذ المعادلة (11) عندما الموجة الكهروضوئية مستوية، وبمعامل فراغي $e^{-jk \cdot x}$ الصورة التالية [17,18]:

$$k^2 \mathbf{E} - k(k \cdot \mathbf{E}) - w^2 \mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (12)$$

ويتحقق مايلي:

$$k \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (13)$$

$$k \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

بناءً على ما تقدم يمكن تصنيف الأوساط غير الإيزوتروبية تبعاً لقيم $\boldsymbol{\varepsilon}$ القطرية في مصفوفة العلاقة (6) كالتالي [8,9]:

- وسط غير إيزوتروبي أحادي المحور $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$
 - وسط غير إيزوتروبي ثنائي المحور $\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$
- يمتاز الوسط غير الإيزوتروبي أحادي المحور بتغييرات $\boldsymbol{\varepsilon}$ على محور واحد مقارنةً بالمحورين الآخرين والذين يبديان سلوكاً إيزوتروبياً ومغايراً للمحور الأول، بينما الوسط ثنائي المحور ستختلف خصائصه باتجاه محورين وتلقائياً سيكون الثالث مخالفاً بخواصه للمحورين الآخرين (الشكل a-2 والشكل b-2) [4]

$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$
a	b

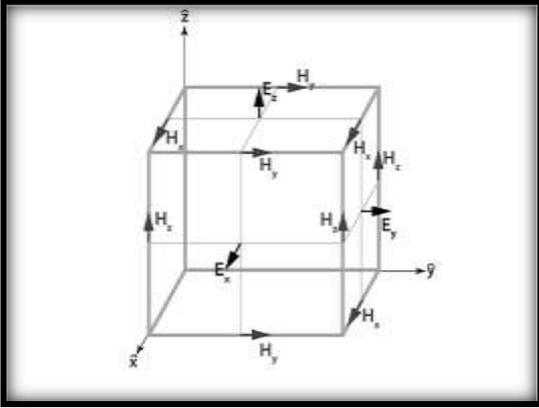
الشكل (2) تسور السماحية الكهربائية أحادي وثنائي المحور [1,17,18]

تحتاج دراسة الحقول الكهروضوئية وانتشاراتها الموجية في الأوساط الإيزوتروبية وغير الإيزوتروبية إلى حلول معادلات ماكسويل في صيغها النقطية الزمانية أو في صورتها العقدية.

ذكرنا آنفاً أن خصائص الوسط غير الإيزوتروبي بالنسبة لـ $\boldsymbol{\varepsilon}$ تصبح بشكل تينسوري $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ كما ورد في العلاقة (2) وبمراعاة أن الوسط غير مغناطيسي وأخذ معادلات ماكسويل في الصيغة العقدية نحصل على ما يلي [1,17,18]:

الجدول (1) معادلات ماكسويل في الأوساط غير الإيزوتروبية في الصيغة النقطية والعقدية

الصيغة النقطية الزمنية	الصيغة العقدية
------------------------	----------------



الشكل (4) نموذج خلية Yee [20,21]

تحتاج هذه التقنية في الوسط الإيزوتروبي لمتابعة الحقل في الفراغ والزمن إلى تقطيع فراغ المسألة إلى خلايا مكعبة الشكل متجانسة ومتماثلة تدعى بخلايا Yee، وفق خطوات زمنية وفراغية منتظمة، لمتابعة تغيرات شدتي الحقل الكهربائي والمغناطيسي، وفق تقنية تعرف بقفزة الضفدع (Leap frog) كما في الشكل (4)، وبمراعاة شروط الحل.

يساير شعاع شدة الحقل الكهربائي شعاع كثافة التدفق الكهربائي (الإزاحة) في الأوساط الإيزوتروبية ($\epsilon = const$)، يتيح ذلك الاستخدام المباشر لطريقة FDTD في البيئة البرمجية CST [20,21].

2- نمذجة ومحاكاة الحقول الكهرومغناطيسية في الأوساط غير الإيزوتروبية باستخدام طريقة الفرق المتناهي في المجال الزمني FDTD

تتطلب دراسة التفاعل الكهرومغناطيسي مع المواد غير الإيزوتروبية الأخذ بالحسبان تغيير قيم السماحية الكهربائية فراغياً وفق الإتجاهات (x, y, z) . يضيف ذلك تعقيدات في خوارزمية الحل في النمذجة والمحاكاة، وصعوبات في متابعة تغييرات حلول معادلات ماكسويل.

تنعكس الخاصية غير الإيزوتروبية للوسط في تشكيل شبكة حل فراغية غير منتظمة عموماً، مما يزيد التقنية تعقيداً، لذلك تم البحث عن إجراءات مساعدة للحفاظ على

يدعى الشعاع k بالشعاع الموجي، ويحدد إتجاه إنتشار الموجة الكهرومغناطيسية ويكون عمودياً على المستوي المشكل من الشعاعين D و B ويسمى بالمستوي DB ويمثل سطح الطور الثابت أو طور جبهة الموجة. يمكن إيجاد تدفق كثافة القدرة الكهرومغناطيسية عبر هذه الموجة وفقاً لبوينتنغ [10]:

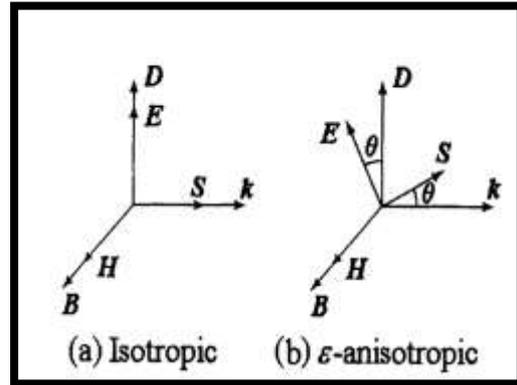
$$S = E \times H \quad (15)$$

حيث

S : شعاع بوينتنغ - الكثافة السطحية للقدرة الكهرومغناطيسية W/m^2

H : شدة الحقل المغناطيسي لمركبة الموجة A/m (مرافق المركبة)

إذا كان الوسط غير إيزوتروبي، فإن شعاع بوينتنغ لن يتطابق على الشعاع K كما في الشكل (3)



الشكل (3) المخططات الشعاعية ل E و D في المواد

الإيزوتروبية وغير الإيزوتروبية [18]

تستند دراسة الحقول الكهرومغناطيسية في وسط ما على حلول معادلات ماكسويل في الفراغ والزمن، باستخدام التقنيات العددية المحوسبة وتعد طريقة الفرق المتناهي في المجال الزمني FDTD، من أهم الطرائق العددية في الكهرومغناطيسية المحوسبة. وضع أسس هذه الطريقة العالم Kane Yee واستنتج خوارزمية في الأوساط الإيزوتروبية، وطورها العالم Taflove فيما بعد، كما في الشكل (4)

شعاع الإستقطاب الذي يشكل زاوية معينة مع شعاع شدة الحقل في الوسط غير الإيزوتروبي كما هو مبين في الشكل (3). تساعد هذه الإجراءات في استخدام شعاع كثافة التدفق الكهربائي D في تقنية الحل التقريبي FDTD المعدلة وذلك بمراعاته في تقطيع معادلات ماكسويل الدورانية وحساب قيمه المتوسطة.

نحصل بحل معادلة ماكسويل الدورانية (9) مع مراعاة المعادلات (15 و 16 و 2) على شدة الحقل الكهربائي في عقد شبكة الحل وفق التالي [3]:

$$E_x|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} = \frac{C_{xx}}{\Lambda} D_x^{n+1}|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{C_{xy}}{\Lambda} D_y^{n+1}|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{C_{xz}}{\Lambda} D_z^{n+1}|_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (17)$$

$$E_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} = \frac{C_{yx}}{\Lambda} D_x^{n+1}|_{i,j+\frac{1}{2},k} + \frac{C_{yy}}{\Lambda} D_y^{n+1}|_{i,j+\frac{1}{2},k} + \frac{C_{yz}}{\Lambda} D_z^{n+1}|_{i,j+\frac{1}{2},k} \quad (18)$$

$$E_z|_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{C_{zx}}{\Lambda} D_x^{n+1}|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \frac{C_{zy}}{\Lambda} D_y^{n+1}|_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \frac{C_{zz}}{\Lambda} D_z^{n+1}|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \quad (19)$$

تحتاج حسابات مركبات شدة الحقل الكهربائي E في الفراغ والزمن إلى متابعة شعاع كثافة التدفق الكهربائي D في كل الأجزاء، وفقاً للحل التقريبي لمعادلة تفرق هذا الشعاع في وسط خالٍ من الشحنات الحرة، كما يلي:

$$D_y|_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{4} (D_y|_{i,j-\frac{1}{2},k} + D_y|_{i,j+\frac{1}{2},k}) \quad (20)$$

انتظامها من أجل متابعة هذه الحلول في مثل هذه الأوساط.

تتميز الأوساط غير الإيزوتروبية، في اختلاف الإستقطاب الكهربائي في الإتجاهات المختلفة وبالتالي عدم تساوي مركبات الحقل في الفراغ ثلاثي الأبعاد.

تم الحفاظ على خلايا Yee في شبكة الحل للوسط غير الإيزوتروبي ذو الخصائص التيسورية، بمتابعة شعاع كثافة التدفق الكهربائي المستقل عن خصائص الوسط والمطابق في الإتجاه على شعاع الإستقطاب الكهربائي في حلول معادلات ماكسويل [المعادلات (7،10،9)].

تتجلى الخصائص غير الإيزوتروبية في اختلاف معاملات المادة في إتجاه كل محور من المحاور الاحداثية بشكلٍ مستقلٍ عن المحاور الفراغية الأخرى.

تمتاز أغلب المواد في الواقع العملي بخصائص غير إيزوتروبية مستخدمة كمواد وتراكيب في التطبيقات الهندسية المختلفة.

يتم بناءً على ما سبق نمذجة ومحاكاة الحقل الكهروضوئي في الوسط غير الإيزوتروبي (بخصائص تيسورية) بحل معادلة ماكسويل (9) في الفراغ والزمن بتقنية

FDTD المعدلة بمراعاة تينسور $[\epsilon]$ كالتالي [3]:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow [\epsilon]^{-1} = \frac{1}{\Lambda} \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\Lambda = |\epsilon| = (\epsilon_{xx}\epsilon_{yy}\epsilon_{zz} + \epsilon_{xy}\epsilon_{yz}\epsilon_{zx} + \epsilon_{xz}\epsilon_{yz}\epsilon_{xy} + \epsilon_{xx}\epsilon_{yz}\epsilon_{zy} - \epsilon_{xz}\epsilon_{yy}\epsilon_{zx} - \epsilon_{xy}\epsilon_{yz}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}\epsilon_{yz}\epsilon_{zy}) \epsilon_0 \quad (16)$$

يضبط التينسور في هذه الحالة العلاقة بين شدة الحقل الكهربائي و شعاع كثافة التدفق الكهربائي (الإزاحة) [المعادلة (2)] في كل جزء من أجزاء المادة. يتضمن هذا الشعاع معلوماتٍ عن تفاعل الحقل مع الوسط في صورة

$$\begin{aligned}
 & \frac{d_{yy}}{\Delta} B_y^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{d_{yz}}{\Delta} B_z^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \\
 H_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{3}{2}} & = \frac{d_{zx}}{\Delta} B_x^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + \\
 & \frac{d_{zy}}{\Delta} B_y^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \\
 & + \frac{d_{zz}}{\Delta} B_z^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}
 \end{aligned} \quad (24)$$

بإتباع نفس الفكرة من أجل تعديل صياغة B_z و y بشكلٍ مماثلٍ للمعادلة (17) [3]:

$$\begin{aligned}
 B_y \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} & = \frac{1}{4} (B_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} \\
 & + B_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \\
 & + B_y \Big|_{i-\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} \\
 & + B_y \Big|_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}})
 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
 B_z \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} & = \frac{1}{4} (B_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} \\
 & + B_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \\
 & + B_z \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} \\
 & + B_z \Big|_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k})
 \end{aligned} \quad (26)$$

حيث:

T - كثافة الفيض المغناطيسي

H - شدة الحقل المغناطيسي A/m

μ - النفاذية المغناطيسية H/m

يتم تعويض القيم المتوسطة لـ y و B_z و B_x في المعادلات (22 و 23 و 24) [3].

يستنتج مما سبق أن دراسة التفاعل الكهرومغناطيسي في الأوساط غير الإيزوتروبية يمكن إجراؤها بالتمذجة

$$\begin{aligned}
 & + D_y \Big|_{i+1,j-\frac{1}{2},k} \\
 & + D_y \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2},k} \\
 D_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} & = \frac{1}{4} (D_z \Big|_{i,j,k-\frac{1}{2}} + D_z \Big|_{i,j,k+\frac{1}{2}} \\
 & + D_z \Big|_{i+1,j,k-\frac{1}{2}} \\
 & + D_z \Big|_{i+1,j,k+\frac{1}{2}})
 \end{aligned} \quad (21)$$

تظهر المركبات y و D_z في العلاقة (17) كقيم عددية غير منسجمة مع شبكة الحل في تقنية FDTD، ولأن $\nabla \cdot [D] = 0$ مقداراً عددياً و D مستقل عن خصائص الوسط وعليه تم تقدير القيم العددية لمركباته كقيم متوسطة حسابية في كل موضع [المعادلات (20،21)] وذلك لحساب مركبات الحقل الكهربائي.

تكرر نفس العملية بالنسبة لـ x و D_z في المعادلة (18) و كذلك لـ D_x و D_y في المعادلة (19).

يصلح هذا المسار لتمذجة إنتشار الأمواج الكهرومغناطيسية في الأوساط غير الإيزوتروبية، وأن يكون هذا التعديل أساساً لمتابعة التفاعل الكهرومغناطيسي مع هذه المواد، والتي تصلح لحل المسائل الهندسية عموماً.

يتم بالمثل صياغة معادلات التحريض المغناطيسي وفق التالي [3]:

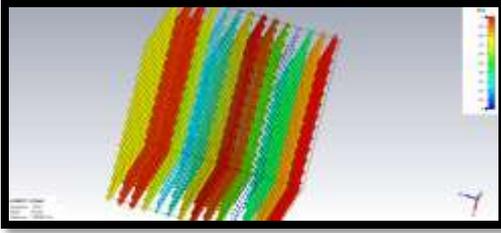
$$\begin{aligned}
 H_x \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} & = \frac{d_{xx}}{\Delta} B_x^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \\
 & \frac{d_{xy}}{\Delta} B_y^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{d_{xz}}{\Delta} B_z^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$H_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} = \frac{d_{yx}}{\Delta} B_x^{n+\frac{3}{2}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + \quad (23)$$

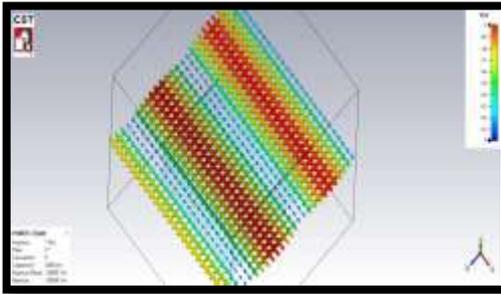
وذلك كقاعدة من أجل المقارنة مع الأوساط غير الإيزوتروبية.

درست الأوساط غير الإيزوتروبية أحادية المحور (Uniaxial) بإتجاه المحور x وبخصائص $\epsilon_x = 10$ و $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$ ، وعند تعرضها لموجة واردة بتردد 1GHz ومطال $1 V/m$.

تم متابعة إنتشار الموجة بنفس المواصفات في الخلاء، ويبين الشكل (6.a) التوزيع الفراغي للحقل الكهربائي، ومقطعه الاقفي في الشكل (6.b) في الحيز الفراغي لفضاء الحل للمسألة، تشكل هذه النتائج القيم المعيارية المرجعية لمقارنة التفاعل الكهروضوئي وتغيراته في الوسط غير الإيزوتروبي، بشدة حقل كهربائي أعظمية في هذه الحالة (الخلاء) $1 V/m$.



الشكل (6.a) إنتشار الموجة الكهروضوئية المستوية في الخلاء فراغياً



الشكل (6.b) مقطع مستوي لإنتشار الموجة في الخلاء يتضح من الأشكال السابقة أن الموجة الكهروضوئية في الخلاء المفتوح تنتشر بجهة موجة عمودية على إتجاه الإنتشار.

والمحاكاة من خلال تطبيق تقنية FDTD المعدلة عن طريق متابعة الشعاع D لحساب شدة الحقل الكهربائي وتفاعلاته مع المادة.

3-تحليل ومناقشة نتائج النمذجة والمحاكاة للتفاعل الكهروضوئية في الأوساط غير الإيزوتروبية:

تم تنفيذ النمذجة والمحاكاة للتفاعل الكهروضوئي في البيئة البرمجية CST مع منبع لموجة كهروضوئية مستوية ومنظمة TEM مؤثرة في الوسط المدروس. حيث الموجة بإستقطابية خطية للحقل الكهربائي المطابق للمحور x والمنتشر بإتجاه المحور z .

تمثل البيئة البرمجية CST-Computer Simulation Technology بيئة بحثية متقدمة لنمذجة ومحاكاة التفاعلات الكهروضوئية في البنى المعقدة وتضم اقساماً متخصصة عديدة، تعتمد تقنيات الحل فيها على الطرائق العديدة من أهمها طريقة الفرق المتناهي في الزمن FDTD.

تم في هذا البحث إتباع الإجراءات التالية:

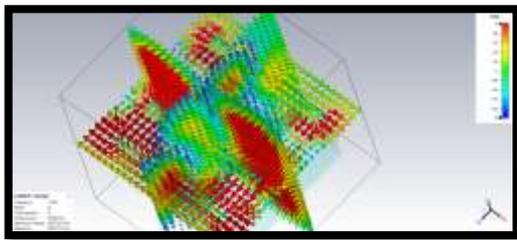
- 1- إختيار مختبر التصميم الملائم.
- 2- بناء مجسم الوسط المدروس.
- 3- إدخال خصائص الوسط غير الإيزوتروبي.
- 4- نمذجة منبع الموجة الكهروضوئية.
- 5- تطبيق الشروط الحدية.
- 6- إنشاء شبكة الحل.
- 7- إختيار Solver ملائم (تم إختيار المجال الزمني- (Time Domain Solver).
- 8- اعتمدت تقنيات إظهار النتائج في الفراغ والزمن بالتميز اللوني والشعاعي.

تم بداية دراسة إنتشار الموجة الكهروضوئية في الأوساط الإيزوتروبية في الخلاء $\epsilon_r = 1$ أولاً، ومن ثم في عازل إيزوتروبي $\epsilon_r = 10$ (مثل الغرافيت والياقوت وغيرها)،

تبين النتائج في هذه الحالة، إنعكاس تأثير الإستقطاب الكهربائي للوسط الإيزوتروبي على إنتشار الموجة الكهربية، حيث يظهر اهتزاز لثنائيات الأقطاب بتأثير إنعكاس الموجة وانكسارها. تظهر نتيجة التفاعل بؤرة لشدة الحقل الكهربائي الناجم من تراكب الظواهر السابقة، وتحافظ الموجة على إنتشارها بإتجاه المحور z . تجدر الإشارة إلى إنخفاض سرعة الإنتشار ضمن العازل، تشير إلى تجاوز قيمة شدة الحقل الكهربائي $3 V/m$.

أشرنا إلى تعقيدات إنتشار الموجة الكهربية في الأوساط غير الإيزوتروبية وضرورة مقارنتها مع الأوساط الإيزوتروبية، عند تطبيق الموجة المستوية ذاتها، بإستقطابية خطية للحقل الكهربائي بإتجاه المحور x (Linear polarized wave) في وسط غير إيزوتروبي احادي المحور (uniaxial) بإتجاه x أيضاً، بخصائص $\epsilon_x = 10$ و $\epsilon_y = \epsilon_z = 2$ ، عند تعرضها لموجة واردة بتردد 1GHz ومطال $1 V/m$.

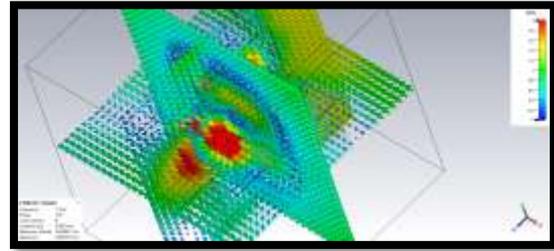
ستخضع ثنائيات الأقطاب (الديبولات) الكهربية في الوسط لإهتزازات غير منتظمة وغير متناظرة، وسينعكس ذلك على سرعة إنتشار الموجة وتبعثرها وقربية إنكسار الوسط في الإتجاهات المختلفة. يقود كل ذلك إلى حدوث تراكب للحقول الكهربية ضمن المادة، وظهور عدد أكبر من بؤر الحقل بقيم عالية (حيث تتجاوز الشدة الأعظمية $6.9 V/m$)، ويترافق ذلك بدوامات للحقل، تبينها الأشكال (8.a) و (8.b) و (8.c) و (8.d).



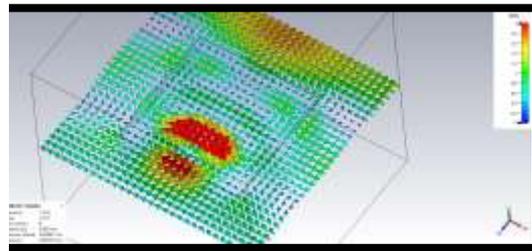
الشكل (8.a) الموجة الكهربية في وسط غير إيزوتروبي فراغياً

نتابع التفاعل الكهربي لذات الموجة الكهربية و بذات المواصفات المشار إليها آنفاً في وسط عازل إيزوتروبي بسماحية نسبية $\epsilon_r = 10$ ، مع المحافظة على الأبعاد الهندسية.

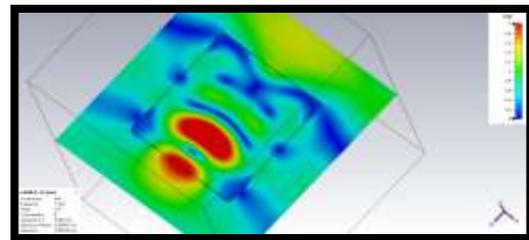
نعلم أن المواد العازلة الإيزوتروبية تتعرض للإستقطاب الكهربائي بتأثير من الحقل المطبق الخارجي، حيث ستشكل ثنائيات الأقطاب في المادة وتهتز مع الحقل المطبق بقيمة محددة للإستقطاب في أي موضع داخل المادة، كما يبين الشكل (7.a) ومقطعه الافقي في المادة في فضاء الحل للمسألة كما في الشكل (7.b,7.c).



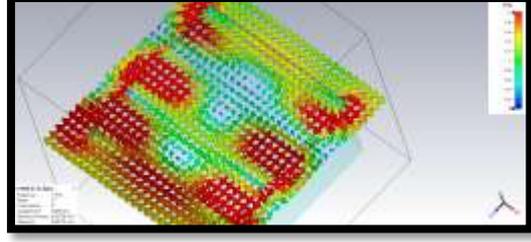
الشكل (7.a) الموجة الكهربية في وسط إيزوتروبي فراغياً



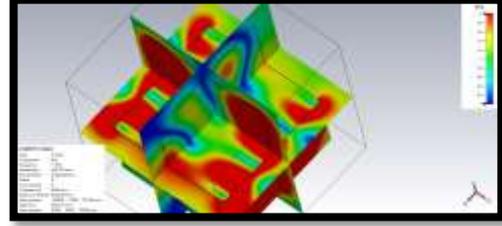
الشكل (7.b) مقطع مستوي للموجة في وسط إيزوتروبي بالاطهار الشعاعي



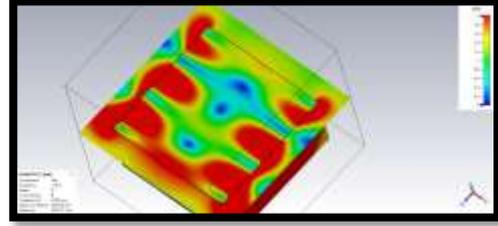
الشكل (7.c) مقطع مستوي للموجة في وسط إيزوتروبي بالتمييز اللوني



الشكل (8.b) مقطع مستوي للموجة في وسط غير إيزوتروبي بالاطهار الشعاعي



الشكل (8.c) الموجة الكهربية في وسط إيزوتروبي فراغياً بالتمييز اللوني



الشكل (8.d) مقطع مستوي للموجة في وسط إيزوتروبي بالتمييز اللوني

نتائج البحث:

نشير إنطلاقاً من نتائج النمذجة والمحاكاة للتفاعل الكهربي في الأوساط غير الإيزوتروبية بتقنية FDTD في البيئة البرمجية CST إلى مايلي:

- تم تعديل تقنية FDTD لتتواءم مع ظاهرة التفاعل الكهربي في الأوساط غير الإيزوتروبية للمحافظة على شبكة الحل المنتظمة في البيئة البرمجية CST
- تم إختيار الخاصية غير الإيزوتروبية أحادية المحور نظراً لتعقيد البنية غير الإيزوتروبية، وقد بينت النتائج حدوث بؤر الحقل الكهربي مزاحةً من وسط المادة باتجاه حوافها في المستويات البينية xy وxz، بينما كانت بؤرة الحقل الكهربي في وسط المادة الإيزوتروبية وتنتشر فيها بشكل انسيابي داخلها.

يتضح من الأشكال الفراغية (8.a) و(8.c) ومقاطعها الأفقية (8.b) و(8.d) أن الحقول الكهربية في الأوساط غير الإيزوتروبية تتركز في بؤرٍ طاقيةٍ عديدةٍ بجوار أطراف المادة باتجاه المستويات xy وxz ذات الخصائص غير الإيزوتروبية (وبشدة حقل تصل إلى $6.9 V/m$)، تنخفض بشكلٍ ملحوظٍ باتجاه المستوي yz ذو الخصائص الكهربية الثابتة.

هذه الأوساط بطريقة النمذجة والمحاكاة مع تعديل تقنية الحل لطريقة FDTD. بينت نتائج هذا البحث أن الحقول الكهربية تتركز في بقعٍ إحصاريةٍ تزداد فيها الكثافة الحجمية للطاقة الكهربية إلى قيمٍ عاليةٍ ضمن هذه المواد تبعاً للإحداثيات وفي لحظاتٍ زمنيةٍ معينة. تؤكد أيضاً احتمالات إمتصاص الطاقة الكهربية بشكلٍ شبه تامٍ وإنزاح بقع تركز الطاقة الكهربية نحو الحواف الخارجية، وذلك مفيدٌ جداً في دراسات التحجيب الكهربي وغيرها.

يمكن الاستفادة من نتائج هذه الدراسة في كشف الخلل في المواد غير الإيزوتروبية من خلال التحليل الكهربي فيها، كذلك يمكن إستخدام النتائج في عمليات التحجيب، للأجهزة الحديثة وخاصةً الأجهزة الطبية وغيرها من النظم الكهربية والإلكترونية.

- تضاعفت قيم شدة الحقل الكهربي في البؤر في الوسط غير الإيزوتروبي بحدود 7 مرات مقارنةً مع قيمها في الخلاء وأكثر من ضعفي الحقل في وسط المادة العازلة الإيزوتروبية.
- يلاحظ من الأشكال السابقة زيادة عدد الدوامات الإحصارية للحقل في الأوساط غير الإيزوتروبية مقارنةً مع الأوساط الإيزوتروبية.
- يتضح مما سبق تركز الطاقة الكهربية في بؤرٍ في الأوساط غير الإيزوتروبية بينما تنخفض بشكلٍ ملحوظٍ في المجالات بخصائص إيزوتروبية، يمكن التأسيس على ذلك في التحجيب الكهربي في التطبيقات الهندسية للنظم الكهربية والإلكترونية والاتصالات.

الخلاصة

يتضح من نتائج هذا البحث أن تفاعل الأمواج الكهربية مع الأوساط غير الإيزوتروبية تشكل عمليةً معقدةً للغاية يمكن متابعتها بحل معادلات ماكسويل في

transactions on antennas and propagation, 52(12), 3273-3279.

13-Peter .B, (2008) Physics electro-optics, san Jose state University, (chapter4,physics 208)

14-Pinho, P. (Ed.). (2018). Antennas and Wave Propagation. BoD–Books on Demand.

15-Roland H.Tarkhanyan, Volume electromagnetic waves in anisotropic crystals with electronic plasma,Willy-VCH,2006

16-Tholin, F., Chemartin, L., & Lalande, P. (2017, September). Simulation of the Lightning Arc Root Interaction with Anisotropic Materials. In ICOLSE 2017

17-Vladimir V. Mitin Dmitry I. Sementsov, An Introduction to Applied Electromagnetics and Optics,CRC press,2017

18-Zhang, K., Li, D., Chang, K., Zhang, K., & Li, D. (2008). Electromagnetic theory for microwaves and optoelectronics (pp. 274-283) Second edition. Berlin: Springer.

19-Zhang, J., Fu, H., & Scales, W. (2018). FDTD analysis of propagation and absorption in nonuniform anisotropic magnetized plasma slab. IEEE Transactions on Plasma Science, 46(6), 2146-2153.

20- شوری، نذیر، محمود، سلام، موسى، محمد، (2011)، النمذجة والمحاكاة الكهروضوئية بطريقة الفرق المتناهي في المجال الزمني، مجلة جامعة دمشق المجلد 27، 2011.

21- شوری، نذیر. (2011)، استخدام الطرائق العددية لتحليل الحقول الكهروضوئية ثلاثية الأبعاد. رسالة ماجستير. قسم هندسة الطاقة. كلية الهندسة. جامعة دمشق. دمشق. سورية. ص106.

22-Hunsberger, F., Luebbers, R., & Kunz, K. (1992). Finite-difference time-domain analysis of gyrotropic media. I. Magnetized plasma. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 40(12), 1489-1495

Referance

- 1- Eroglu, A. (2010). Wave propagation and radiation in gyrotropic and anisotropic media. Springer Science & Business Media..
- 2- Jayet, B. (2015). Acousto-optic and photoacoustic imaging of scattering media using wavefront adaptive holography techniques in NdYO4 (Doctoral dissertation, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI).
- 3- Dou, L., & Sebak, A. R. (2006). 3D FDTD method for arbitrary anisotropic materials. Microwave and Optical Technology Letters, 48(10), 2083-2090.
- 4- Fakhte, S., & Oraizi, H. (2016). Analysis and design of rectangular uniaxial and biaxial anisotropic dielectric resonator antennas. Progress In Electromagnetics Research C, 62, 43-50.
- 5- Chakravorti, S. (2017). Electric field analysis. CRC Press.
- 6- Choi, D. H., & Hoefer, W. J. (1986). The finite-difference-time-domain method and its application to eigenvalue problems. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 34(12), 1464-1470.
- 7- Hu, Y., Fang, Y., Wang, D., Zhong, Y., & Liu, Q. H. (2018). Electromagnetic waves in multilayered generalized anisotropic media. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 56(10), 5758-5766.
- 8- Komeylian, S., & Mohammadi, F. (2020). Conical Swiss Roll Metamaterial Application for Slow-light Waveguides. Canadian journal of electrical and computer engineering, 43(3), 163-169
- 9- Lei, Q., Wang, J., & Shi, L. (2018). Shielding Analysis of Uniaxial Anisotropic Multilayer Structure by Impedance Network Boundary Condition Method. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 67(4), 2462-2469.
- 10- Sadiku, M. N. (2005). Elements of electromagnetics (Vol. 428). New York: Oxford university press
- 11- Mickelson, A. R. (1992). Geometrical Optics. In Physical Optics (pp. 171-225). Springer, Boston, MA.
- 12- Akyurtlu, A., & Werner, D. H. (2004). Modeling of transverse propagation through a uniaxial bianisotropic medium using the finite-differencetime-domain technique. IEEE