

المقدرة اللدنة للتحنيب في الأعمدة ذات المقاطع البروفيلية

د.م. مؤيد صبح صبح

أستاذ مساعد، قسم الهندسة الإنشائية، كلية الهندسة المدنية، جامعة دمشق

المُلخَص

على الرغم من أن الدراسات الكلاسيكية القديمة أثبتت وجود احتياطي لدن مهم عند تحفيز حالات التحنيب اللدن، إلا أن معظم التطبيقات العملية لتصميم الفولاذ لازالت حتى اليوم تعتمد بشكل كبير على المقدرة المرنة للتحنيب.

جرى نقاش رياضي وفيزيائي بين كبار علماء الانشاءات في الفترة ما بين نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين حول صحة ودقة الطرق المقترحة لاستغلال اللدونة في حالات التحنيب كان نتيجتها تواجد طرق رياضية وفيزيائية جديدة بالاهتمام لاستغلال اللدونة في الأعمدة أثناء حدوث التحنيب.

يناقش هذا البحث مسألة الاحتياطي اللدن للأعمدة المضغوطة مركزياً بحيث يمكن الاستفادة من علاقات الاحتياطي اللدن للمقطع المستطيل لحساب احتياطي لدن للمقطع البروفيلي H تحت التحنيب.

يبين البحث أن هناك احتياطي لدن مهم للمقطع البروفيلي يمكن الاستفادة منه عند شروط معينة أثناء حدوث التحنيب، كما بين البحث حجم الزيادة في المقدرة التحنيبية أثناء التشغيل على اللدونة بالمقارنة مع التشغيل على المرنة.

إن وجود احتياطي لدن أثناء التحنيب يظهر أن هناك إمكانية لتفعيل حالة لاحقة للتحنيب لتجنب الانهيارات المفاجئة للاستقرارية تحت الحمولات الزلزالية.

الكلمات المفتاحية: الضغط المركزي، التحنيب المرن، التحنيب اللدن، الاحتياطي

اللدن، معامل المرنة، المعامل المماسي، معامل فعال، معامل المرنة المضاعف، معامل المرنة المنخفض، التحنيب اللاحق اللدن.

تاريخ الإيداع: 2022/7/26

تاريخ القبول: 2022/8/29



حقوق النشر: جامعة دمشق - سورية،

يحفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب

الترخيص CC BY-NC-SA 04

Plastic buckling capacity of columns with profiled section

Dr.-Eng. Moaid Subh Subh

Docent at structural Engineering Department- Faculty of Civil Engineering, Damascus University

Abstract

Although early classical studies demonstrated the presence of an important plastic reserve when catalyzing states of plastic buckling, most practical applications of steel design today still rely heavily on the elastic capacity of buckling.

A mathematical and physical debate took place among the great structural scientists in the period between the end of the nineteenth and the beginning of the twentieth about the validity and accuracy of the proposed methods for exploiting plasticity in cases of buckling.

This paper discusses the issue of plastic reserve of central compressed column so that plastic reserve relationships of rectangular section can be used to extract plastic reserve for profiled H section under buckling.

This research shows that there is an important plastic reserve of the profile section that can be utilized under certain conditions during the occurrence of buckling, and also demonstrates the magnitude of the increase in buckling capacity during the employed the plasticity compared to elasticity.

The presence of a reserve of plasticity during buckling shows that there is a possibility of activating a post-buckling state to avoid sudden collapses of instability under seismic loads.

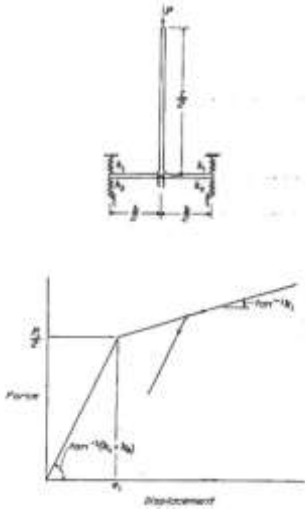
Keywords: Centric compression, Elastic buckling, Plastic buckling, plastic reserve capacity, Modulus of elasticity, Tangent-modulus, Effective modulus, Double-modulus of Elasticity, Reduced-modulus of Elasticity, Plastic Post-buckling.

Received: 26/7/2022

Accepted: 29/8/2022



Copyright: Damascus University- Syria, The authors retain the copyright under a CC BY- NC-SA



الشكل (1) نموذج دوبيرغ و وايدر للتحنيب غير المرن للأعمدة بإدخال أثر التشوهات الأولية [5]

في دراسة عملية قدم تشن ياشون Cheng Yaoshun بالتعاون مع آخرين في العام 1994 حلاً عملياً لمسألة التحنيب اللاحق للندن لمقطع عمود مستطيل plastic post buckling of column معتمداً على مبادئ حسابية بسيطة لمعادلات التوازن لتقادي التعقيدات الحسابية للمعادلات من درجات عالية [6] ، اعتمد تشن نموذجاً حسابياً بسيطاً لعمود بسيط مؤلف من مقطع مستطيل يتعرض لتحنيب لدن لاحق شكل (2). قام تشن بكتابة معادلة التوازن في لحظة التحنيب كتابع للزمن (t) على شكل سلسلة من الشكل:

$$P - P_c = \frac{1}{n_1} P_n t^n + \frac{1}{n_{i+1}} P_{n+1} t^{n+1} + \dots \quad \dots Eq1$$

ثم معادلة الخط المرن ω الناتج عن الانحناء بسلسلة مشابهة:

$$\omega = \frac{1}{n_1} \omega_n t^n + \frac{1}{n_{i+1}} \omega_{n+1} t^{n+1} + \dots \quad \dots Eq2$$

حيث P الحمل المركزية المطبقة و P_c حمولة التحنيب الحرجة.

1. مقدمة

درست حالة التحنيب الغير مرن تاريخياً منذ نهاية القرن الثامن عشر، ففي العام 1889 اقترح إنغيسر Engesser لأول مرة استخدام المعامل المماسي E_t Tangent-modulus كمعامل فعال Effective modulus في علاقة أويلر لإدخال أثر اللاخطية في الأعمدة [1]، لاحقاً أبدى كونسيدير Considere ملاحظات مهمة ناتجة عن حالة التحميل والتفريغ للأعمدة loading and unloading مفادها أن معامل المرونة الفعال هو قيمة واقعة ما بين معامل المرونة (E) والمعامل المماسي E_t [2]. بعد عدة عقود قدم كارمان Karman نظريته الشهيرة: معامل المرونة المضاعف Double-modulus of Elasticity (يفترض كارمان أن هناك معاملي مرونة مختلفين أحدهما للشد والآخر للضغط) والتي وضعت بناء على اقتراح إنغيسر وملاحظات كونسيدير حيث تم التحقق منها لاحقاً في مجموعة من التجارب الشاملة والتي أثبتت أن نظرية معامل المرونة المنخفض الوحيد Reduced-modulus of elasticity قد أعطت اجهادات عالية بشكل ملحوظ [3]. في العام 1947 أعلن شانلي Shanley اعتماد على أبحاث في شركة لوكهيد للطيران Lockheed Aircraft Corporation بأن المعامل المماسي E_t المقترح سابقاً من قبل إنغيسر هو التطبيق الصحيح لمعامل المرونة الفعال لأجل التحنيب وراء حد التناسب Proportional Limit وذلك بسبب أن الاختلاف في الإجهادات بين الشد والضغط عند حدوث التحنيب اللدن يحصل بسبب أن حالة تفريغ الحمولة تؤثر فقط في إجهادات الضغط، بينما تخضع إجهادات الشد إلى سلوك القوس الناتج عن علاقة الإجهادات و التشوهات المرنة (σ, ϵ) ، أي أن تأثير تفريغ الحمولة يحصل في جهة واحدة من الأعمدة عند التحنيب Unloading of one side to column [4].

تم إدخال أثر الانحرافات الأولية initial imperfections لأول مرة عن طريق دوبيرغ و وايدر في العام 1951 Duberg and Wilder وانجزوا موديل حقيقي لطبيعة مادة العمود (شكل 1)، حيث استنتجوا بأن معامل الحمولة المقابل للمعامل المماسي هو الحمولة الحرجة للعمود في المرحلة غير المرنة أي هي الحمولة التي يبدأ عندها العمود بالانحناء [5].

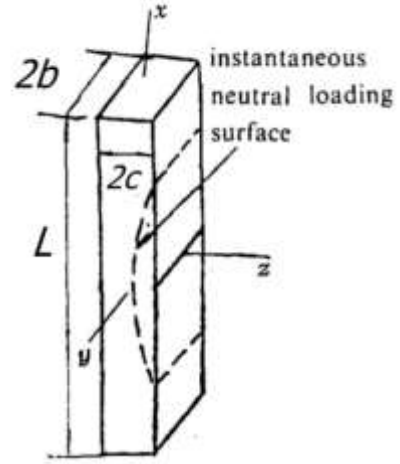
النظرية مجموعة من المعادلات اللاخطية الغير قابلة للتكامل لتوصيف مجموعة التغيرات في التشوهات والاجهادات.

تفترض نظرية التدفق اللدنة ان هناك قواعد للتدفق Flow rules توجهه و تحدد كمية التشوهات اللدنة في المادة، حيث يمكن اعتبار أن التشوه الكلي لجسم يمكن أن ينقسم (تجميعياً أو طرداً) إلى قسم مرن ϵ_e وقسم لدن ϵ_p .

$$\epsilon = \epsilon_p + \epsilon_e \dots Eq5$$

القسم المرن يخضع لقواعد المرونة الخطية (قانون هوك Hooke's law) أو يحاكي موديلات المرونة المفردة Hyper elastic constitutive model أما تحديد كمية الجزء اللدن من التشوهات يحتاج إلى قواعد التدفق Flow rules وإلى نموذج تماسك Hardening model. تعتمد نظرية التشوهات اللدنة Plastic deformation theory على توصيف تتسور الاجهادات Stress tensor تابع لتتسور التشوهات

Deformation tensor. يمكن للمادة حسب هذا التوصيف أن تحافظ على تشوهات لدنة كبيرة دون أن تدخل في مرحلة انكسار Fracture لكن يمكن للمعدن المطاوعة Ductile metal أن ينهار عندما تكبر التشوهات إلى حجم معين. يعتبر شماس أن نظرية التدفق للدونة والتي انتشرت بشكل واسع في الآونة الأخيرة تبالغ في تقرير قيمة اجهادات التحنيب وفي كثير من الأحيان تفشل في توقع حدوث التحنيب، بينما نظرية التشوهات والتي تعتبر ضعيفة فيزيائياً بالمقارنة مع نظرية التدفق ، يمكن أن تتوقع حصول التحنيب بشكل أفضل وخصوصاً عند المقارنة مع التجارب العملية. إن استخدام النظريتين في حالة التحنيب اللدن للأعمدة يعطي نتائج مختلفة في ظاهرة تسمى (مفارقة التحنيب اللدن) Plastic buckling paradox، لدراسة هذه الظاهرة قام شماس بإجراء بحث على أعمدة تحمل مقطع صليبي الشكل Cruciform column حيث استنتج أن هناك فروقات ملحوظة على النتائج المتحصلة من نظريتي التدفق والتشوهات. لقد تبين ان نظرية التدفق تعطي نتائج عالية لإجهادات التحنيب اللدنة بينما طريقة التشوهات تعطي نتائج تتماشى إلى حد بعيد مع النتائج التجريبية.



الشكل (2) عمود بسيط الاستناد يتعرض لتحنيب لاحق لدن حسب نموذج

تشن [6]

بتعريف الاجهادات σ_c التابع ل P_c و σ التابع ل $(E_t$ و $P)$ يمكن كتابة معادله المعامل المماسي على اعتبار أن التحنيب اللدن يحصل في اللحظة $t = 0$:

$$E_t = E_t^c + \left(\frac{dE_t}{d\sigma}\right)_c (\sigma - \sigma_c) + O[(\sigma - \sigma_c)^2] \dots Eq3$$

حيث $(c,0)$ كميات عددية للسلسلة ، E_t^c معامل المرونة في اللحظة السابقة ل (t) من الممكن الآن كتابة علاقة الحمولة اللدنة الحرجة بدقة 5 حدود للسلسلة المفروضة:

$$\omega_5 = a_5 \cdot c \cdot \cos(n \cdot x/l)$$

$$u_5 = \beta_5(x + l/2)$$

$$p_5 = -k \cdot \beta_5$$

$$\sigma_c = -\frac{1}{3} a^2 \cdot E_t^c$$

$$P_c = \frac{1}{3} k \cdot a^2 \dots Eq4$$

حيث P_c هي الحمولة عند قيمة معامل المماس E_t ، (β_5, a_5) ثوابت عددية يتم تحديدها حسب الشروط الحدية للمسألة.

في دراسة حديثة ناقش شماس Shamass تناقضات بين نظريتي التدفق اللدن Plastic Flow theory ونظرية التشوهات اللدنة plastic deformation theory [7] ، حيث استعرض ما قدمه مجموعة من العلماء (Geotrey Ingram) في العام 1934 كتفسيرات رياضية لسلوك التشوه اللدن للمواد المطاوعة ضمن نظرية التشويش المكاني Theory of dislocations، حيث ظهرت بعد ذلك النظرية الرياضية للدونة أو نظرية التدفق اللدن Flow plasticity theory. تستخدم هذه

مرحلة التناسب: $(A \leftarrow O)$ (σ_e) Proportional range
 المرحلة المرنة غير الخطية $(A_P \leftarrow A)$ (σ_P) Non-linear
 elastic Range يسري قانون هوك $E\epsilon$ على العلاقة الخطية
 ما بين التشوهات والاجهادات:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \dots Eq6$$

حيث:

$\sigma(KN/cm^2, N/mm^2)$: الاجهادات الناظمية في عنصر
 التجربة الفولاذية، $\sigma = \frac{P}{A}$ ، حيث: $P(KN, N)$ قوة الشد المؤثرة
 و $A(cm^2, mm^2)$ مساحة المقطع العرضي لعنصر التجربة،
 $E(KN/CM^2, N/mm^2)$: معامل مرونة الفولاذ
 $E=210000N/mm^2$ ، $\epsilon = \Delta L / L_0$ ، النسبة النسبية للعنصر
 (بدون وحدة) وهو مقدار لتطاول ΔL الذي يحصل نتيجة قوى
 الشد على الطول الأساسي L_0 ، أما في المرحلة اللاخطية
 $(A_P \leftarrow A)$ فإن العلاقة غير خطية على الرغم من أن التشوهات
 غير متبقية؛ يصبح معامل المرونة غير ثابت القيمة في هذه
 المرحلة و يمكن أن يحسب بدلالة ميل مماس في نقطة محددة،
 أو من المعادلة التفاضلية لتغيير قيم الاجهادات مع التشوهات
 أي:

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad \dots \dots Eq6$$

يمكن تحديد مواقع الحدود $(A_P \leftarrow A)$ بناء على قيمة
 التشوهات ϵ [8].

اتفق العلماء في المؤتمر الدولي لفحص المواد في بروكسل
 في العام 1906

International Kongreß for Materialprüfung in
 Brussel (1906) على اعتبار أن نهاية حد المرونة (A_P) يقع

عندما تبقى التشوهات بترك قيمة متبقية مقدارها

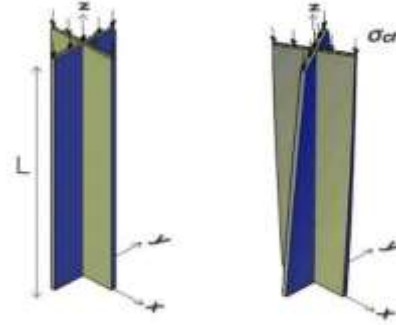
($\epsilon_P = 0,001 = 0,1\%$) نظراً لتطور أجهزة التجارب
 والقياس فإن الكودات العالمية تعتمد حالياً قيمة أكثر دقة

($\epsilon = 0,01\%$) ، تقع النقطة (A) قريبة جداً من النقطة

(A_P) إلى درجة أنه يمكن اعتبار أن قيمة (0.01%) تعبر عن
 النقطتين (A_P, A) ، من الواضح أن ميل خط العلاقة يتغير بعد

النقطة (A) حيث يكون ثابتاً من $(A \leftarrow O)$

$\tan \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E$ بينما يصبح متغيراً من $(A_P \leftarrow A)$
 ويمكن قياس الميل في هذه الحالة عند نقاط محددة إذ يعتبر أن
 الخط (A, A_P) منحنى له مماسات متعددة، علماً أن هذا الميل

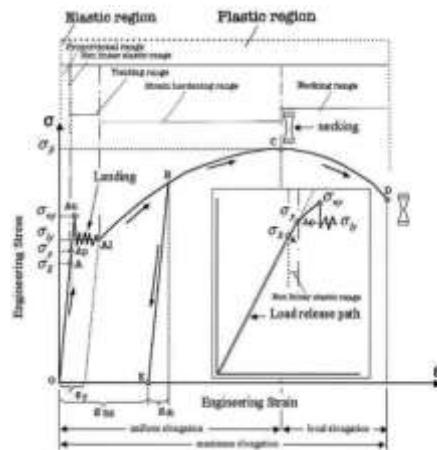


الشكل (3) عمود صليبي الشكل كعينة مدروسة لفحص الفروقات
 بين نظريتي التدفق والتشوهات لتحديد قيمة التحبيب اللدن للأعمدة [7]
 بين الباحث شماس (7) أن الفرق بين طريقتي التدفق
 والتشوهات يعود إلى الانحرافات الأولية Imperfection والتي
 يمكن لحظها بطريقة التشوهات بشكل فعال.

2. أساسيات القواعد النظرية:

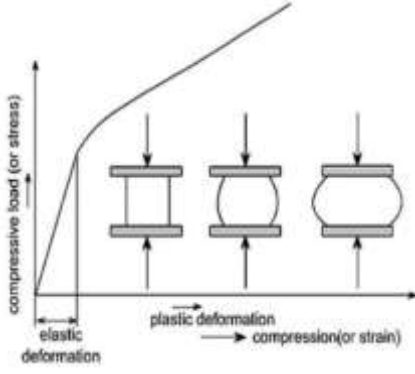
اعتمدت نظريات ميكانيك الانشاءات في بنائها على السلوك
 الميكانيكي لمواد البناء. يمثل مخطط اجهاد تشوه الفولاذ النموذج
 المثالي للسلوك حيث تتمايز مناطق منفصلة تحمل علاقات
 محددة بين التشوهات والاجهادات.

تظهر منطقة المرونة Elastic region من لحظة التحميل
 (0) وتنتهي عند النقطة (A_P) وتتميز بكون التشوهات (ϵ) غير
 متبقية (نزول التشوهات عند زوال الاجهادات) وتتألف هذه
 المنطقة من مرحلتين:



الشكل (4) مخطط علاقة التشوهات بالاجهادات للفولاذ والناجم من

تجربة الشد (صورة مجمعة من عدة مصادر [8] [9])



الشكل (5) تجربة الضغط بالفولاذ يظهر مخطط علاقة التشوهات بالإجهادات . [2] تظهر المنطقة المرنة والمنطقة اللدنة بوضوح للعلاقة ما بين التشوهات والإجهادات الضاغطة، بالطبع يجب أن نختار عينة الضغط بحيث لا تخضع للتحنيب، كما يجب الانتباه إلى أن الاحتكاك ما بين سطوح معدات الضغط وسطح عينة الفولاذ لا يؤثر على النتائج ويتم في كثير من الأحيان اتباع إجراءات لتفادي هذا الأثر، تعطى المواصفة الأمريكية ASTM E9 مواصفات تجربة الضغط على الفولاذ [10] .

3. قوى التحنيب اللدنة: Plastic buckling

Forces

تسمى الإجهادات الموزعة بانتظام على كامل المقطع بإجهادات أويلر التحنيبية عندما تصل القوى الضاغطة p إلى حمولة التحنيب P_{cr}

$$\sigma_{cr_i} = \frac{P_{cr}}{A} \dots Eq8$$

(يرمز الدليل i إلى السلوك المرن المثالي $ideal-elastic$ behavior)

من المعروف بأن شروط ظهور إجهادات أويلر التحنيبية هي مركزية القوة المؤثرة والاستقامة الدقيقة للعمود (بدون انحرافات $Non\ perfection$) وكذلك علاقة مثالية مرنة ما بين التشوهات والإجهادات. لأجل عمود طول التحنيبي (L_b) مساحته (A) وعزم عطالته (I) فإن

$$\sigma_{cr_i} = \pi^2 \frac{EI}{L_b^2 A} \dots Eq9$$

بإدخال مفهوم معامل النحافة λ ونصف قطر العطالة r

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad \lambda = \frac{L_b}{r} \dots Eq10$$

تأخذ علاقة أويلر الشكل التالي:

يقاس عند نقطة النشوة اللحظية (ϵ_{is}) Instance strain وليس عند قيمة النشوة المتبقي (ϵ_{rs}) Residual strain ، حيث ($\epsilon_{is} = \epsilon_{is} + \epsilon_{rs}$) . قبل الدخول إلى منطقة السلوك اللدن Plastic behavior region نستطيع تمييز مرحلة انتقال مهمة تسمى المجال المرن اللدن Elastic plastic Range وتمتد من (A_p إلى A_u). تبدأ التشوهات بالبقاء بقيم مهمة في هذه المرحلة، كما أن قيمة إجهاد الخضوع الأعلى σ_{uy} مقرون بالنقطة (A_u). تتفق جميع الكودات العالمية على أن القيمة الحسابية لإجهاد الخضوع σ_y في الفولاذ تحدد عند التشوه ($\epsilon_y = 0,2\%$)، تبقى العلاقة بين التشوهات والإجهادات في هذه المنطقة غير خطية، يعتبر المجال من (A_u) وحتى (D) سلوكاً لدناً ويقسم إلى ثلاثة أقسام:

I. مرحلة الخضوع Yielding range وتمتد من (A_u) إلى (A_L) حيث تسري اللدنة Plasticity على كافة أجزاء المقطع الهندسي للعنصر، وتتميز هذه المنطقة بدخول ألياف المقطع الهندسي من الخارج إلى الداخل باللدونة تدريجياً مما يؤدي إلى تنذب الإجهادات. نميز بذلك قيمة قصوى (σ_{uy}) ودنيا (σ_{Ly}) للإجهادات. عادة ما يتم نمذجة هذه المنطقة بخط مستقيم أفقي Behavior idealization يعكس قيمة وسطية ما بين القيم القصوى و الدنيا للإجهادات

$$\sigma_{average} = \frac{\sigma_{Ly} + \sigma_{uy}}{2} \dots \dots \dots Eq7$$

بناءً على ذلك فإن معامل المرونة يأخذ القيمة صفر.

II. تسمى مرحلة السلوك اللاخطي من النقطة (A_L) إلى النقطة (C) مرحلة تقسية التشوهات Strain hardening، حيث يتماسك الفولاذ من جديد بعلاقة لا خطية تتمايز فيها التشوهات المتبقية والتشوهات اللحظية [9].

III. تمتد مرحلة الانهيار، Necking range، حيث تتقاطع منطقة تقسية الإجهادات مع منطقة الانهيار عند قيمة إجهاد الشد الأقصى ($\beta\sigma$) Ultimate Stress .

بشكل مشابه تظهر تجربة الضغط على الفولاذ سلوكاً مشابهاً

لتجربة الشد (شكل 5) [2]

تقع اجهادات التحنيب للعناصر ذات التصنيف 1 و 2 Class (حسب الكود الأوربي EC3-1-1) [12] ما بين قيمتي حد التناسب σ_p وحد الخضوع σ_y كما في الشكل (6)

$$\lambda = \lambda_p \leftarrow 6_p \text{ حالة}$$

$$\lambda = 0 \leftarrow 6_f \text{ حالة}$$

نتيجة للتجارب التي أجريت في بداية القرن العشرين على أعمدة من الحديد ممثلة المقطع (غير نحيفة Stocky section) تمت الاستعاضة لأول مرة عن الخط المنحني ما بين (σ_F) و (σ_p) بخط مستقيم بحيث تم اعتماده في الكودات التصميمية في ذلك الوقت (تجارب تيتماير TETMAIER) [13].

على مدى السنوات اللاحقة تم اعتماد هذه الطريقة في رسم خطوط اجهادات التحنيب Buckling stress lines والتي تم تطويرها لاحقاً بنسخ معدلة كقواعد لكودات التصميم .

يعود حل مسألة التحنيب اللدن إلى إنغيسر Engesser [1] . اقترح إنغيسر في البداية (1890) تطوير حساب معامل المرونة E لحساب اجهادات أويلر (المعادلة Eq14) بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$T = \frac{d\delta}{d\varepsilon} \dots Eq14$$

في المجال $6_f \rightarrow 6_p$

اعترض يازنسكي JASINSKI [14] على هذا الاقتراح على اعتبار أنه في لحظة التحنيب سيكون جميع الاجهادات في مناطق الشد الإنعطافي مختلفاً عن تجميعها في مناطق الضغط الإنعطافي

- في مناطق الشد الإنعطافي. $\sigma = \frac{M}{I}y$
- في مناطق الضغط الإنعطافي $\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{IT}{L^2A}$

(شكل 7)

$$\sigma_{cr-i} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \dots Eq11$$

تشتط علاقة أويلر أيضاً أن الاجهاد التحنيبي σ_{cr-i} يجب أن يكون أقل من اجهاد التناسب σ_p (انظر الشكل 6)

$$\sigma_{cr-i} < \sigma_p \dots Eq12$$

تسمى المعادلة Eq12 مقارنة أويلر المبالغ بها Euler hyperbole [11] ، في حال تم التعويض عن σ_{cr} ب σ_p نحصل على النحافة الحدية λ_p Limited slenderness

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{6\sigma_p}} \dots Eq13$$

من الواضح أن قيمة النحافة الحدية تتعلق بـ كبر مجال المرونة للمادة فكلما ازدادت مقاومة مادة الفولاذ ازدادت قيمة حد التناسب وبالتالي انخفضت قيمة النحافة الحدية، أي ازداد اتساع

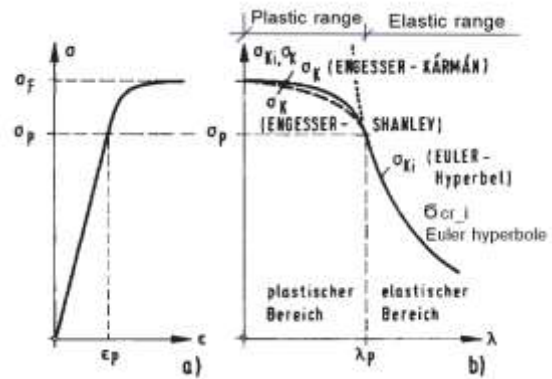
كبر المرحلة الخطية المرنة Linear elastic range

$$\lambda_p = 103.9 \leftarrow \sigma_p = 192 N/MM^2 \leftarrow ST37$$

$$\varepsilon_p = \frac{192}{210000} = 0,001 = 0,1\%$$

$$\lambda_p = 84.8 \leftarrow \sigma_p = 288 N/MM^2 \leftarrow ST52$$

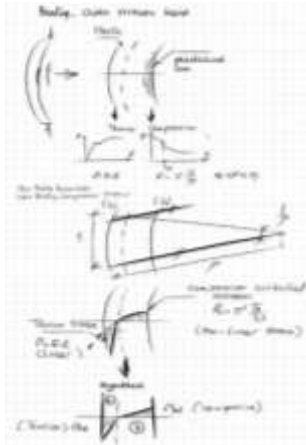
$$\left(\varepsilon_p = \frac{288}{210000} = 0,0014 = 0,14\% \right)$$



الشكل (6) مخططات علاقات التحنيب في المجالين المرن واللدن (b) بالعلاقة مع مخطط السلوك للفولاذ [11]

كما يتضح من الشكل (6) يتعلق السلوك التحنيبي للعمود بالسلوك الاجهادي وفي الحالة التي يكون فيها نحافة العمود λ أقل من النحافة الحدية λ_p تصبح معادلة أويلر المرنة Eq11 غير صالحة ، كما أن ظهور اجهاد تحنيبي σ_{cr} أعلى من اجهاد الخضوع σ_y غير ممكن من الناحية الفيزيائية.

(إجهادات مملوكة وذلك لتمييزها عن حالتها التوزيع الكلاسيكي المرن المثلي الشكل واللدن المستطيل).



الشكل (8) تحليل الإجهادات المملوكة (المؤلف)

على اعتبار أن القوة الخارجية p_t تصبح ثابتة عن وصول الاجهادات إلى حد الخضوع ($f_y = \sigma_F$)، سنفرض ان قوة الضغط P_k المسببة للتحنيب لن تتزايد أيضاً في حالة عزم التحنيب المتناهي في الصفر والذي يظهر مع بداية التحنيب.

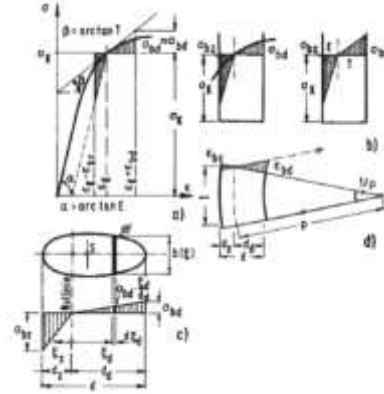
من الممكن أن تتراكم اجهادات التحنيب σ_{cr} في وسط المقطع مع بعضها مشكلة حالة غير كلاسيكية لتوزيع الإجهادات سنسميها خالة الإجهادات الإنعطافية المملوكة Bending-Owen stresses state، إن مسارات اجهادات الضغط ما بين مركز المحور المحايد (المحور الصفري) وطرف المقطع يخضع لفرضية - برنولي والقائلة بأن مسار التشوهات مرتبط بعلاقة خط ($\sigma - \epsilon$) وهو خطي مستقيم أي ان نمذجة الانحناء تكون خطية الشكل Curvilinear . إن توزيع الاجهادات الشاده على عكس الضاغطة يكون خطياً مرناً بسبب القيمة الصغيرة للانحناء الناتج عن العزم infinite Bending values

يمكن الباس الخط المنحني لمسار الاجهادات الضاغطة بخط مستقيم (شكل 8) يكون ميله مساوي للمعامل T (معامل ميل المماس Tangent module) عند قيمة الاجهاد الحرج σ_{cr} ،

وبالتالي نستطيع كتابة علاقات الاجهادات الإنعطافية كما يلي:

$$\sigma_{bz} = \sigma_{bt} = E \cdot \epsilon_{b2} \dots Eq17 \rightarrow \text{شد}$$

$$\sigma_{bd} = \sigma_{bc} = T \cdot \epsilon_{bd} \dots Eq18 \rightarrow \text{ضغط}$$



الشكل (7) تحليل إجهادات الضغط اللدنة والشد المرنة حسب اقتراح إنغيسر [1] على الرغم من أن هذا الاعتراض كان صحيحاً ضمن شروط محددة ، إلا أن إنغيسر وجد نفسه مضطراً لتعديل اقتراحه الأول (1895) وبذلك بحساب قيم اجهادات التحنيب حسب المعادلة التالية:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{T_k}{\lambda^2} (\sigma_P < \sigma_{cr} < \sigma_F) \dots Eq15$$

حيث:

T_k : معامل التحنيب (Buckling Modulus) وليس معامل المرونة (Elasticity Modulus) ،حيث أن ظهور T_k مشروط بظهور اجهادات التحنيب σ_{cr} . يمكن اعتبار أن اجهاد التحنيب σ_{cr} ليس مشروطاً بالعلاقة المثالية المرنة ما بين التشوهات والاجهادات، ولذلك يسقط الدليل (i): ideal والمعبر عن مثالية العلاقة المرنة) من اسم الاجهاد. وبالتالي فإن T_k هو تابع على الشكل التالي:

$$T_k = T_k(\sigma_{cr}) \dots Eq16$$

(الدليل k من اللغة الألمانية kincken بينما تمت المحافظة على الدليل cr من اللغة الإنكليزية critical، أي أن: $\sigma_{cr} = \sigma_k$)

في العام (1910) أجرى كارمان Karman [15] [16] تجارب دقيقة أكدت صحة فرضية إنغيسر في المضمون وبالتالي عرفت المعادلة Eq15 لاحقاً بمعادلة إنغيسر-كارمان

ENGESSER-KARLAN-equation

4. حالة الاجهادات الإنعطافية المملوكة: Owen

stresses state

تم في سياق هذا البحث تحليل حالة الإجهادات الجديدة الناتجة من إنغيسر والتصحيحات اللاحقة بشكل مبسط قابل للحساب العددي تحت الاسم الجديد للإجهادات المقترح عالمياً

$$T_k = T \frac{I_d}{I} + E \frac{I_z}{I} \dots \dots \dots Eq28$$

وعلى اعتبار أن T_k تابع للقيمة T ومتعلق بقيمة الاجهاد σ_{cr}

نستطيع كتابة العلاقة العامة للعزم بدلالة التقوس

$$M = \frac{T_k l}{\rho} \dots Eq29$$

والتي تتماشى مع معادلة العزم المرن بالعلاقة مع التقوس

$$M = E \frac{I}{\rho} \dots Eq30$$

في حال وضعنا نسبة معامل المرونة E إلى معامل التحنيب T_k بالقيمة χ نستطيع بطريقة مشابهة كتابة علاقة اجهاد

التحنيب σ_{cr} في المجال اللدن كما يلي:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{T_k}{\lambda^2} = \pi^2 \frac{\chi E}{\lambda^2} \dots Eq31$$

عند حد التاسب p يكون $T=E$ وبالتالي $T_k = E$ و ينطبق المحور المحايد على مركز الثقل. عند حد الخضوع $f_y = \sigma_f$ تكون $T=0, E=0$ ينزاح المحور المحايد على طرف المقطع الهندسي (الليف الخارجي).

5. الاحتياطي اللدن للمقاطع البروفيلية (حالة المقاطع المستطيلة و البروفيلية H) باستخدام تقريب إنغيسر

تمثل المقاطع البروفيلية H والمستطيلة نموذجاً لدراسة الاحتياطي اللدن للمقاطع عموماً بسبب كونهما الحالة التي يشتق منهما عدد كبير من النماذج، جرى في سياق هذا البحث دراسة اجهادات التحنيب المرنة σ_{cr} وكذلك الاجهادات اللدنة التحنيبية $\sigma_{cr,pl}$ باستخدام تقريب إنغيسر المشروح في هذا البحث.

يعطى الكود الألماني (DIN 4114 A) [17] علاقات

لحساب معامل ميل المماس لخط الاجهادات اللدن T

$$\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_f - \sigma_p} = \tan\left(\frac{\varepsilon \cdot E - \sigma_p}{\sigma_f - \sigma_p}\right) \dots Eq32$$

وبالتالي معامل ميل المماس

$$T = [1 - (\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_f - \sigma_p})^2] \cdot E \dots Eq33$$

يعطي [17] علاقات لحساب موقع المحور المحايد بالعلاقة مع (E, T) وكذلك اشتقاق لحالة تابع معامل التحنيب كما يلي شكل (9):

$$d_c = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{T}{E}}}, d_t = d - d_c \dots Eq34$$

بسبب اختلاف ميل الاجهادات الشاده والضاغطة لا يقع المحور المحايد على مركز ثقل المقطع و إنما في الموقع الذي يتحقق فيه التوازن بين كمية اجهادات الشد والضغط. من الشكل (8) يمكن كتابة شرط التوازن على الشكل التالي:

بالانطلاق من المساحة التفاضلية :

$$dF_d \text{ المساحة التفاضلية لمنطقة الضغط}$$

$$dF_z \text{ المساحة التفاضلية لمنطقة الشد}$$

وحيث أن العزوم الستاتيكية S_d, S_z حول المحور المحايد تحسب من علاقات مقاومة المواد كما يلي:

$$\int_0^{d_d} \frac{\sigma_{bd}}{d_d} \xi_d dF_d = \int_0^{d_z} \frac{\sigma_{bz}}{d_z} \xi_z dF_z \dots Eq19$$

$$\int_0^{d_d} \xi_d dF_d = S_d, \int_0^{d_z} \xi_z dF_{dz} = S_z \dots Eq20$$

$$\frac{\sigma_{bd}}{d_d} S_d = \frac{\sigma_{bz}}{d_z} S_z \dots Eq21$$

من الشكل (8) يمكن ربط تقوس العنصر $\frac{1}{\rho}$ بالتشوه بالعلاقة:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{bd}}{d_d}, \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{bz}}{d_z} \dots Eq22$$

بالتعويض في المعادلة 18, 17 Eq

$$\sigma_{bd} = \frac{T}{\rho} d_d ; \sigma_{bz} = \frac{E}{\rho} d_z \dots Eq23$$

بالتعويض في المعادلة Eq21 نحصل على موقع المحور المحايد:

$$T S_d = E S_z \dots Eq24$$

بكتابة علاقة العزم الداخلي الناتج عن مخططات الاجهادات الضاغطة والشاده:

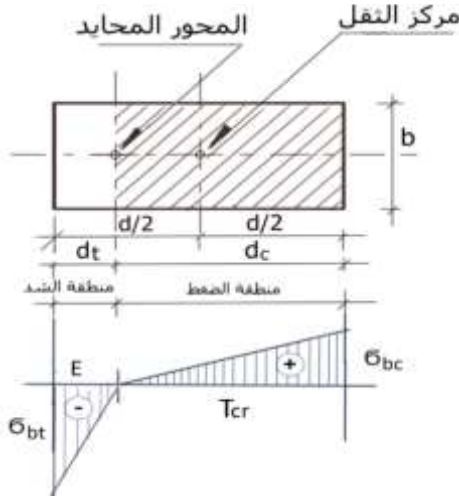
$$M = \int_0^{d_d} \sigma_{bd} \frac{\xi_d}{d_d} b \cdot d\xi_d \cdot d\xi_d + \int_0^{d_z} \sigma_{bz} \frac{\xi_z}{d_z} b \cdot d\xi_z \cdot d\xi_z \dots Eq25$$

$$M = \frac{\sigma_{bd}}{d_d} I_d + \frac{\sigma_{bz}}{d_z} I_z \dots Eq26$$

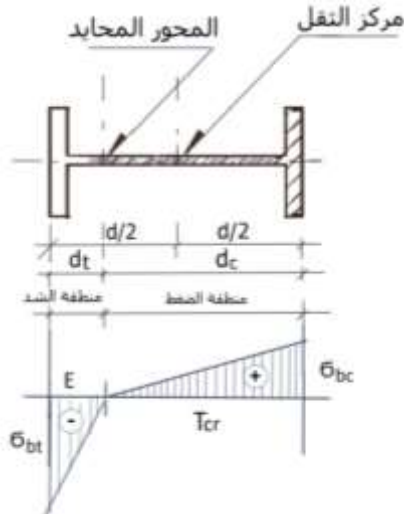
$I_d + I_z$ عزوم العطالة لمنطقتي الشد و الضغط حول المحور المحايد، بتعويض قيمة الاجهادات بالتقوس الإنعطافي من المعادلة :

$$M = \frac{1}{\rho} (T I_d + E I_z) = \frac{1}{\rho} \left(T \frac{I_d}{I} + E \frac{I_z}{I} \right) \dots Eq27$$

$I = I_d + I_z$ عزم العطالة الكلي للمقطع حول المحور المحايد. نستطيع الآن كتابة معامل التحنيب T_k Buckling Modulus بالعلاقة:



الشكل (9) مواصفات المقطع المستطيل في حالة التحنيب اللدن
([17] مع تعديلات المؤلف)



الشكل (10) مواصفات المقطع البروفيلي في حالة التحنيب اللدن

$$T_k = \frac{4 \cdot \frac{T}{E}}{(1 + \sqrt{\frac{T}{E}})^2} \cdot E \quad \dots Eq35$$

يتضمن الجدول (Table 1) نتائج حسابات المقدرة التحنيبية

$$\cdot \sigma_{cr,pl} = \sigma_k \text{ للمقطع المستطيل}$$

يظهر المخطط البياني شكل (11) علاقة إجهادات التحنيب

اللدنة $\sigma_{cr,pl} = \sigma_k$ بالعلاقة مع النحافة λ وكذلك بالمقارنة

مع إجهادات التحنيب المرنة σ_{cr} للمقطع المستطيل.

بشكل مشابه يمكن استخراج علاقات لحساب موقع المحور

المحايد بالعلاقة مع (E, T) وكذلك اشتقاق لحالة تابع معامل

التحنيب للمقطع البروفيلي H شكل (10) :

$$d_c = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{T}{E}}}, \quad d_t = d - d_c$$

$$T_k = \frac{2 \cdot \frac{T}{E}}{(1 + \sqrt{\frac{T}{E}})^2} \cdot E \quad \dots Eq36$$

الجدول (1) حسابات إجهادات التحنيب المرنة واللدنة للمقطع المستطيل

Plastic Buckling Stresses of Column										
Rectangular Section										
Steel Properties										
Section	Yield Stress	f_u	E_s	ν_s	α_s	β_s	γ_s	δ_s	ϵ_s	ζ_s
Rectangular	235	355	210000	0.3	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025	0.0025
Stress between Proportional limit and Yield stress (N/mm ²)										
σ	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18
σ	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18
Tangent modulus (N/mm ²)										
E_t	210000	209980	209960	209940	209920	209900	209880	209860	209840	209820
Buckling modulus (N/mm ²)										
K	210000	209980	209960	209940	209920	209900	209880	209860	209840	209820
Neutral Axis Location (mm)										
e	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Plastic Buckling Stress										
σ_k	235	234	233	232	231	230	229	228	227	226
σ_{cr}	235	234	233	232	231	230	229	228	227	226



الشكل (11) مخطط علاقة إجهادات التحنيب اللدنة لعمود مستطيل المقطع مع النحافة

يظهر المخطط البياني شكل (12) علاقة إجهادات التحنيب اللدنة $\sigma_{cr.pl} = \sigma_k$ بالعلاقة مع النحافة λ وكذلك بالمقارنة مع إجهادات التحنيب المرنة σ_{cr} للمقطع البروفيلي H .

يتضمن الجدول (Table 2) نتائج حسابات المقدرة التحنيبية اللدنة للمقطع البروفيلي H . $(\sigma_{cr.pl} = \sigma_k)$

التحبيب اللدن بنفس دور المفاصل اللدنة ذات التشوهات المحدودة في الإطارات ولذلك ينصح باستخدام التقييد للأعمدة المضغوطة ذات السلوك اللدن. إن هذه المسألة جديرة بالاهتمام وتتطلب دراسات معمقة لتحديد حدود المقدرة التحنيبية اللدنة التي تمتلكها الأعمدة تحت الحمولات الدورية.

إن وجود دراسات مستقبلية لتحديد القيمة الدقيقة للاحتياطي اللدن التحنبي للأعمدة قضية في غاية الأهمية ويرجى منها استخراج معاملات احتياطي لدن يستفاد منها في حالات الحمولات القصوى الطارئة كالزلازل والروافع.

التمويل: هذا البحث ممول من جامعة دمشق وفق رقم التمويل (501100020595).

References

- [1] F. Engesser, "Die Knickfestigkeit gerader Stabe," *Zentralbl.der Bauverwaltung*, no. 11, 1891.
- [2] a. considère, "Résistance à La compression du béton armé et du béton fretté," *Le génie*, no. 1064, 1902 .
- [3] S. Goldstein, "Theodore von Karman 1881-1963 , Biographical Memoirs," Royal Society.
- [4] F. R. Shanley, Inelastic column theory ,Volume 14, J.Aeron.Sci, 1947.
- [5] Duberg, L. E., and Wilder, T. W., "Inelastic Column Behaviour," NACA, Washington, DC, 1952.
- [6] Cheng Yaoshun, Lu Wenda, Fang Hong, "PLASTIC POST-BUCKLING OF A SIMPLY SUPPORTED COLUMN WITH A SOLID RECTANGULAR CROSS-SECTION," *Applied Mathematics and Mechanics*, Vols. English Edition, Vol. 16,, no. No. 8,, Aug. 1995.
- [7] R. Shamass, "Plastic Buckling Paradox: An Updated Review," *Frontiers in Built Environment*, vol. Volume 6, no. Article 35, 23 April 2020.
- [8] E. Schlechte, Festigkeitslehre für Bauingenieure, Berlin: Bauwesen Berlin, 1967.
- [9] Horst Czichos, Tetsuya Saito, Leslie Smith, Springer Handbook of Materials Measurement Methods, Würzburg: Springer Science+Business Media, Inc., 2006.
- [10] ASTM E9, Standard Test Methods of Compression Testing of Metallic Materials at Room Temperature, West Conshohocken: ASTM International, 2000.
- [11] F. Schleicher, "Ober die Grundlagen der Plastizitätstheorie und des plastischen," *Abh.Stahlbau Heft 10*, 1951.
- [12] E. 3., Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings, Brussels: EUCROPEA)!! COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, March 2009.
- [13] L. Tetmajer, Die Gesetze der Knickungs- und zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe., Wie: F.Oeuticke, 1903.
- [14] F. Stussi, Vorlesungen über Baustatik, basel : Springer basel AG, 1953.
- [15] T. Karman, "Die Knickfestigkeit gerader Stabe," *Phys. Z.*, vol. 9, pp. 136-140, 1908.
- [16] T. Karman, "Untersuchungen Über Knickfestigkeit," *Forsch.-Arb.lng.-Wesen*, vol. Nr.81, 1910.
- [17] D. 4114, Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung) - Berechnungsgrundlagen, Deutsche Normen, 1952.