Damascus University Journal for the Basic Sciences
Vol 42 No.2 (2026): 147 -160

مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 42–عدد 2 (2026): 147– 160

A– شبكة الزمر الجزئية الضبابية

أيمن عبدالله الحلقي*

قسم الرياضيات– كلية الهندسة المعلوماتية والاتصالات – الجامعة العربية الدولية a-halaki@aiu.edu.sy

الملخص:

لتكن G زمرة منتهية, $L(G)$ شبكة الزمر الجزئية,$F(G)$ شبكة الزمر الجزئية الضبابية و~ علاقة تكافؤ على $F(G)$, لنرمز لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز $\overline{F(G)}$. بما أن $F(G)$ ليست منتهية وليست واضحة المعالم كما لا يمكن من خلالها التنبؤ بطبيعة الزمرة G فإننا ذهبنا, كما هو حال الكثير من الباحثين, الى دراسة المجموعة $\overline{F(G)}$, إذ نُقدّم ،في ورقتنا البحثية الحالية، علاقة ترتيب جديدة على $\overline{F(G)}$ و بيّنا أنها تشكل شبكة محدودة منتهية ، ومن ثم بينا ماهية الذرات وثنوي الذرات فيها. هذا ومن خلال هذه الشبكة استطعنا توصيف الشبكة $L(G)$ ومن ثم الزمرة G.

الكلمات المفتاحية: المجموعة المرتبة ،علاقة التكافؤ، الشبكة , الزمرة الجزئية الضبابية .

التصنيف الرياضياتي العالمي 2020: 03E72, 06D72, 20N25.

تاريخ الإيداع: 2025/10/12
تاريخ القبول: 2025/11/20

ISSN (online): 2789-6366
http://journal.damascusuniversity.edu.sy/index.php/index/index

A-Lattice Of Fuzzy Subgroups

Ayman Abdullah alhalaqi Alhalaqi*
* Department of Mathematics- Faculty of Informatics Engineering - Arab nternational University a-halaki@aiu.edu.sy

Received: 12/10/2025
Accepted: 20/11/2025

Abstract

The set of all fuzzy subgroups of a group G will be denoted by F(G). Let $\sim$ be an equivalence relation on F(G). We denote by $\overline{F(G)}$ the set of all equivalence classes by $\sim$. One of the most important problems in fuzzy group theory is to classify the fuzzy subgroups of a group Therefore, several papers have treated the set $\overline{F(G)}$ for particular case of group. In our paper we have studied this set differently through make it lattice. for this, we mentioned new order relation on $\overline{F(G)}$ and we have proved many theorems like 3.4, 3.8,3.20 and others.

Key words: Partially Ordered Set, Equivalence, Lattice, Fuzzy Subgroup

Mathematical Subject Classification2020: 03E72, 06D72, 20N25.

1. مقدمة:

إن مفهوم الزمرة الجزئية الضبابية يتوافق إلى حد كبير مع مفهوم الزمرة الجزئية الكلاسيكية, إذ كل زمرة جزئية ضبابية تُعين وتتعين بسلسلة من الزمر الجزئية الكلاسيكية, هذا التوافق بمثابة مفتاح لبحثنا هذا, وللعديد من الابحاث التي نشرت سابقا في هذا المجال.
لتكن G زمرة, ولتكن $F(G)$ مجموعة كل الزمر الجزئية الضبابية من G. عندئذ تُشكل المجموعة $F(G)$ شبكة بالنسبة لعلاقة الاحتواء المعرفة في نظرية المجموعات الضبابية [4]. إنّ الشبكة $F(G)$ لأيٍّ كانت الزمرة المدروسة G هي شبكة غير منتهية, ولذا في كثير من الأحيان يصعب تحديد معالم هذه الشبكة لاسيما ربط قدرة هذه الشبكة ببنية الزمرة المدروسة, لهذا ومن خلال إحدى أهم خواص الزمر الجزئية الضبابية (2.11), توجه العاملون في هذا المجال الى ابتكار مجموعة منتهية من خلال الشبكة $F(G)$ تمثلت ببناء علاقة تكافؤ ($\sim$)على المجموعة $F(G)$ ومن ثم تركيز الاهتمام على دراسة مجموعة صفوف التكافؤ ($\overline{F(G)}$) الناجمة عن تلك العلاقة. اعتبرت هذه المسألة ,مسألة **تصنيف** الزمر الجزئية الضبابية, إحدى أهم المسائل الحديثة في نظرية الزمر الضبابية، ولذا فإن العديد من الأوراق العلمية عالجت هذه المسالة من أجل عدة حالات للزمرة،ل ا سيما تحديد قدرة المجموعة $\overline{F(G)}$ وعلاقتها ببنية ومرتبة الزمرة المدروسة، وأبعد من ذلك, هناك من توجه إلى دراسة هذه المجموعة من خلال نظرية الشبكات حيث بيّنوا أنّه من الممكن أن تكون هذه المجموعة شبكة لأيٍّ كانت الزمرة المدروسة, وفي ما تقدّم ,العديد من الأبحاث نُشرت، مثل [1]،[3]،[5]،[7]،[9]،[11]،[12] ، [13] وغيرها.

أما نحن، ومن خلال ورقتنا البحثية الحالية، عرّفنا علاقة ترتيب جديدة على المجموعة $\overline{F(G)}$ وبرهنا على أنّها تشكل شبكة ضمن حالتها العامة، دون أي قيود على عناصر هذه المجموعة أو على بنية الزمرة المدروسة، من ثم قدّمنا توصيف دقيق لطبيعة الذرة وثنوي الذرة والعلاقة بينهما وبين الذرة وثنوي الذرة في الشبكة $L(G)$. هذا ونُقدّم بعضاً من التعاريف كالمجموعة $\wp_H^K$ حيث درسنا خواص لهذه المجموعة تمهيداً لدراسة إمكانية ربط البنية الشبكية للشبكة $\overline{F(G)}$ بالشبكة $L(G)$ ومن ثم بالبنية الزمرية للزمرة G إذ تمكنا من ذلك من خلال الإثبات على صحة 3.17 ومن ثم 3.20 .إذاً, كما هو الحال من أجل الشبكة $L(G)$, يمكن توصيف الزمرة G من خلال الشبكة $\overline{F(G)}$ والعكس.

2.أساسيات:

2.1 تعريف: [6]

لتكن $\leq$ علاقة ترتيب (جزئي) على مجموعة غير خالية A و $a, b \in A$:

1) يسمي الزوج المرتب $(A, \leq)$ مجموعة مرتبة (جزئياً).
2) إذا كان $\sup\{a, b\}$ موجوداً فإننا نعبر عنه بالرمز $a + b$, وبالمثل إذا كان $\inf\{a, b\}$ موجوداً فإننا نعبر عنه بالرمز $a.b$, ويقال إنّ A شبكة إذا كان $a + b$ و $a.b$ موجوداً لأجل أي a,b من A , كما يقال عن مجموعة جزئية غير خالية L من الشبكة A إنّها شبكة جزئية إذا كان كل من $a + b$ و $a.b$ موجوداً في L لكل a,b من L.
3) يقال إنّ a صفر A إذا كان $a \leq b$ من أجل كل b من A, ويرمز له بالرمز 0_A, واختصاراً 0, وفي حال وجوده توصف A بأنها محدودة من الأدنى. كما يقال إنّه واحد A إذا كان $b \leq a$ من أجل كل b من A, ويرمز له بالرمز 1_A, واختصاراً 1, وفي حال وجوده توصف A بأنها محدودة من الأعلى. ويقال إنّها محدودة إذا كانت محدودة من الأدنى والأعلى.
4) اذا كان $a \leq b; a \neq b$ نكتب $a < b$, واذا لم يكن هناك عنصر c من A يحقق $a < c < b$ نكتب $a \prec b$ وعندها نقول b يغطي (covers) a.
5) ملاحظة: إذا كان $a \prec b$ فإن $a < b$ لكن العكس غير صحيح بالضرورة.
6) إذا كانت A محدودة من الأدنى. يقال عن a ذرة إذا كان $0 \prec a$.
7) إذا كانت A محدودة من الأعلى. يقال عن a ثنوي ذرة إذا كان $a \prec 1$.

8) يقال عن $a,b \in A$ إنهما متقارنان إذا كان $b \le a$ أو $a \le b$, كما يقال إنّ A سلسلة إذا كان أي عنصرين منها متقارنين.

2.2 تعريف:[6]

لتكن L شبكة محدودة. يقال إنّ L مكونة من r سلسلة إذا أمكن إيجاد مجموعات $S_1, S_2, \dots, S_r$ من L تحقق:

1) $\bigcup_{i=1}^{r} S_i = L \setminus \{0,1\}$.

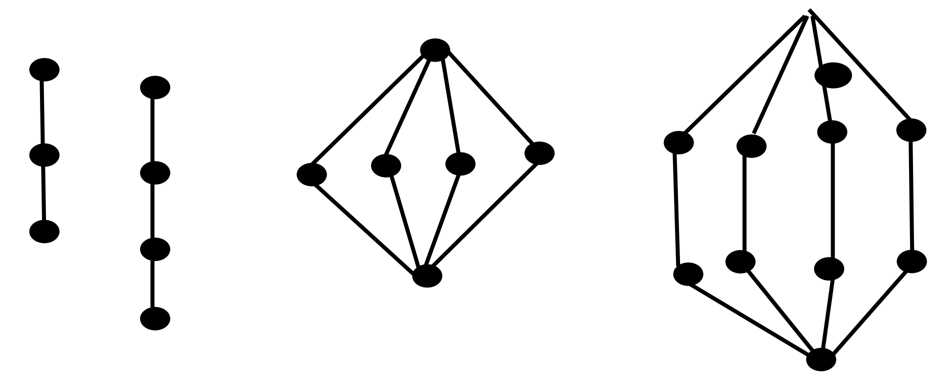
2) $\bigcap_{i=1}^{r} S_i = \emptyset$.

3) من أجل أي $a,b \in L$ إذا كان $a \in S_i;\ 1 \le i \le r$ و $0 \ne b \le a$ فإن $b \in S_i$.

4) S_i سلسلة, $1 \le i \le r$.

ترميز:

- يرمز للشبكة L بالرمز M_r إذا كانت مكونة من r سلسلة و كل من $S_1, S_2, \dots, S_r$ تحوي عنصراً وحيداً.
- يرمز للشبكة L بالرمز S_r إذا كانت مكونة من r سلسلة وكل من $S_1, S_2, \dots, S_r$ تحوي عنصرين.
- يوضح هذا من خلال مخططات هاس الآتية:



M_1　S_1　M_4　S_4

2.7 مبرهنة: [8]

لتكن G زمرة ما ولنرمز لمجموعة كل الزمر الجزئية منها بالرمز $L(G)$ عندئذ $(L(G), \le)$ شبكة حيث $\le$علاقة الاحتواء.

2.8 مبرهنة: [10]

لتكن G زمرة و p,q عددان أوليان مختلفان عندئذ إذا كان $L(G) \cong M_n$ فإن واحدة وواحدة فقط من القضايا الآتية محققة:

1) $G \cong \mathbb{Z}_{p^2} \& n = 1$.

2) $G \cong \mathbb{Z}_{pq} \& n = 2$.

3) $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \& n = p + 1$.

4) n=p+1 و G ليست تبديلية من المرتبة pq حيث q يقسم p-1.

2.9 مبرهنة: [10]

لتكن G زمرة و p عدد أولي عندئذ $L(G) \cong M_{p+1}$ إذا , وفقط إذا , تحقق:

إما $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. أو G جداء شبه مباشر داخلي لزمرة دوارة من المرتبة p على زمرة دوارة من المرتبة q أي $G \cong <d>_q \rtimes <c>_p$, حيث q عدد أولي يقسم $p-1$ و $dc = c^s d$ بحيث $s \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ و $s^q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$. وفي هذه الحالة G تحوي بالضبط زمرة جزئية واحدة من المرتبة p و p زمرة جزئية من المرتبة q.

2.10 مبرهنة: [4] لتكن G زمرة. يرمز لمجموعة كل الزمر الجزئية الضبابية من G بالرمز $F(G)$.عندئذ تشكل المجموعة $F(G)$ شبكة وفق علاقة الاحتواء المعرفة في نظرية المجموعات الضبابية.

2.11 مبرهنة: [14]

لتكن μ مجموعة جزئية ضبابية من G عندئذ: μ زمرة جزئية ضبابية من G إذا, وفقط إذا, كانت هناك سلسلة من الزمر الجزئية الكلاسيكية $P_1(\mu) < P_2(\mu) < \cdots < P_n(\mu) < G$,بحيث يعبر عن μ بالشكل

$$\mu(x) = \begin{cases} a_1\ ; & x \in P_1(\mu) \\ a_2\ ; & x \in P_2(\mu)\backslash P_1(\mu) \\ \vdots & \\ a_n\ ; & x \in G\backslash P_n(\mu) \end{cases} \quad \text{أو} \quad \mu(x) = \begin{cases} \mu(P_1) = a_1 \\ \mu(P_2\backslash P_1) = a_2 \\ \vdots \\ \mu(G\backslash P_n) = a_n \end{cases} ,\ a_i \in [0,1].$$

2.12 تعريف: [11]

لتكن μ, η زمرتين جزئيتين ضبابيتين من زمرة G بحيث:

$$\mu(x) = \begin{cases} a_1\ ; & x \in P_1(\mu) \\ a_2\ ; & x \in P_2(\mu)\backslash P_1(\mu) \\ \vdots & \\ a_n; & x \in P_n(\mu)\backslash P_{n-1}(\mu) \end{cases} \quad \& \quad \eta(x) = \begin{cases} b_1\ ; & x \in P_1(\eta) \\ b_2\ ; & x \in P_2(\eta)\backslash P_1(\eta) \\ \vdots & \\ b_m; & x \in P_m(\eta)\backslash P_{m-1}(\eta) \end{cases}$$

عندئذ يقال إنّ μ, η متكافئان ونكتب $\mu \sim \eta$, إذا كان:

1) $n = m$

2) $P_i(\mu) = P_i(\eta)$ لكل $i \in \{1,2, \ldots, n\}$

يمكن التحقق بسهولة من أنّ العلاقة $\sim$ هي علاقة تكافؤ على الشبكة $F(G)$.

2.13 مثال:

لتكن H زمرة جزئية من زمرة G, عندئذ المجموعة الجزئية الضبابية χ_H من G المعينة بالشكل: $\chi_H(x) = \begin{cases} 1; x \in H \\ 0; x \in G\backslash H \end{cases}$ هي زمرة جزئية ضبابية من G. لاحظ أن $P_1(\chi_H) = H\ , P_2(\chi_H) = G$

ترميز: [2]

1) ليكن $\mu \in F(G)$ يُرمز لصف التكافؤ للعنصر μ بالشكل $\overline{\mu}$ أي $\overline{\mu} = \{\eta \in F(G);\ \mu \sim \eta\}$ وبما أن كل صف تكافؤ مثل $\overline{\mu}$ يقابل سلسلة واحدة وواحدة فقط تحوي G من $L(G)$ ولتكن السلسلة $H_1 < H_2 < \cdots < H_r < G$ فإنه من الممكن أن يشار لصف التكافؤ $\overline{\mu}$, دون الخلل بماهية هذا العنصر, بالشكل: $\overline{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_r < G$.

2) يُرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ بالشكل $\overline{F(G)}$ أي $\overline{F(G)} = \{\overline{\mu};\ \mu \in F(G)\}$.

2.14 مثال:

بالعودة الى المثال نجد $\overline{\chi_H} = \left\{\eta_i \in F(G);\ \begin{matrix} \eta_i(H) = \alpha_i \\ \eta_i(G\backslash H) = \beta_i \end{matrix}\right\}$ و يشار له بالشكل $\overline{\chi_H}: H < G$

3. نتائج:

3.1 تعريف:

ليكن $\overline{\mu}, \overline{\eta} \in \overline{F(G)}$ معينان بالشكل: $\overline{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_r < G$ ، $\overline{\eta}: K_1 < K_2 < \cdots < K_s < G$ عندئذ نعرف العلاقة الثنائية $\leq$ على المجموعة $\overline{F(G)}$ بالشكل: $\overline{\mu} \leq \overline{\eta} \Leftrightarrow \overline{\mu} = \overline{\eta} \ \text{ or } H_r \leq K_1$ أي

3.2 مثال:

بأخذ المجموعة $\overline{F(\mathbb{Z}_{pq})}$ ، p, q عددان أوليان, وليكن $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2, \overline{\mu}_3 \in \overline{F(\mathbb{Z}_{pq})}$ معينة بالشكل $\overline{\mu}_1: \mathbb{Z}_p < \mathbb{Z}_{pq}$,$\overline{\mu}_2: e <$,$\mathbb{Z}_p < \mathbb{Z}_{pq}$ ، $\overline{\mu}_3: \mathbb{Z}_q < \mathbb{Z}_{pq}$, لنجد أن $\overline{\mu}_2 < \overline{\mu}_1$ ، $\overline{\mu}_2 \nleq \overline{\mu}_3$.

3.3 مبرهنة:

$(\overline{F(G)}, \leq)$ مجموعة مرتبة.

البرهان:

العلاقة $\leq$ انعكاسية (وضوحاً).

العلاقة $\leq$ تخالفية: ليكن $\overline{\mu}, \overline{\eta} \in \overline{F(G)}$ معينان بالشكل $\overline{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_r < G$، $\overline{\eta}: K_1 < K_2 < \cdots < K_s < G$ بحيث $\overline{\mu} \leq \overline{\eta}$ و $\overline{\eta} \leq \overline{\mu}$ و $\overline{\eta} \neq \overline{\mu}$ هذا يعني $H_r \leq K_1 < K_s \leq H_1 < H_r \leq K_1$ أي $H_r = K_1 = K_s = H_1 = H_r$ وهذا مرفوض طالما $\overline{\eta} \neq \overline{\mu}$.

العلاقة $\leq$ متعدية: ليكن $\overline{\mu}, \overline{\eta}, \overline{\sigma} \in \overline{F(G)}$ معينة بالشكل $\overline{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_r = G$ ، $\overline{\eta}: K_1 < K_2 < \cdots < K_s = G$ ، $\overline{\sigma}: M_1 < M_2 < \cdots < M_t = G$ بحيث $\overline{\mu} \leq \overline{\eta}$ و $\overline{\eta} \leq \overline{\sigma}$ أي $H_r \leq K_1 \leq K_s \leq M_1$, إذاً $\overline{\mu} \leq \overline{\sigma}$.

3.4 مبرهنة:

المجموعة المرتبة $(\overline{F(G)}, \leq)$ تشكل شبكة محدودة.

البرهان:

ليكن $\overline{\mu}, \overline{\eta} \in \overline{F(G)}$ معينة بالشكل: $\overline{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_r = G$، $\overline{\eta}: K_1 < K_2 < \cdots < K_s = G$ عندئذ إذا كان $\overline{\mu}, \overline{\eta}$ متقارنين (بفرض $\overline{\mu} \leq \overline{\eta}$) فإن $\overline{\mu} + \overline{\eta} = \overline{\eta}$, $\overline{\eta}.\overline{\mu} = \overline{\mu}$. بفرض أن $\overline{\mu}, \overline{\eta}$ ليسا متقارنين لنبين أن $\overline{\mu} + \overline{\eta} = \overline{\rho}$ حيث $\overline{\rho}$ معين بالشكل $\overline{\rho} : H_r \vee K_s < G$,إنّ $\overline{\rho}$ يمثل حد أعلى (وضوحاً), و بفرض أن $\overline{\sigma}: M_1 < M_2 < \cdots < M_t = G$ حد أعلى عندئذ $H_r \leq M_1$ و $K_s \leq M_1$ أي أن $H_r \vee K_s \leq M_1$ إذن $\overline{\rho} \leq \overline{\sigma}$. الآن, لنبين أن $\overline{\mu}.\overline{\eta} = \overline{\eta}$ حيث $\overline{\eta}: H_1 \wedge K_1 < G$,إنّ $\overline{\eta}$ يمثل حد أدنى (وضوحاً) و بفرض أن $\overline{\sigma}: M_1 < M_2 < \cdots < M_t < G$ حد أدنى عندئذ $M_t \leq H_1$ و $M_t \leq K_1$ أي أن $M_t \leq K_1 \wedge H_1$ إذن $\overline{\sigma} \leq \overline{\eta}$. ويمكن ملاحظة أن $\overline{\chi_G} : G$, $\overline{\chi_e} : e < G$ تمثلان واحد الشبكة وصفرها على الترتيب.

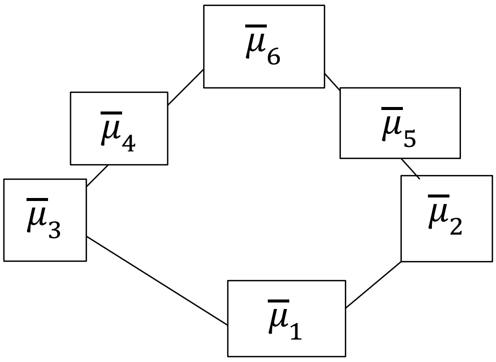
نسمي الشبكة $\overline{F(G)}$ A– شبكة الزمر الجزئية الضبابية

3.5 نتيجة:

من أجل أي $\overline{\mu}, \overline{\eta} \in \overline{F(G)}$, إذا كان $\overline{\mu}, \overline{\eta}$ متقارنين فإن $\overline{\mu} + \overline{\eta}$ مساوٍ لأحدهما, أما إذا كانا غير متقارنين فإنه يوجد $K \in L(G)$ بحيث $\overline{\mu} + \overline{\eta} = \overline{\chi_K}$ والحال نفسه من أجل $\overline{\eta}.\overline{\mu}$.

3.6 مثال:

لنأخذ المجموعة $\overline{F(\mathbb{Z}_{pq})}$, الزمر الجزئية في $\mathbb{Z}_{pq}$ هي $\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q, e, G$, بالتالي $\overline{F(\mathbb{Z}_{pq})} = \{\overline{\mu}_i \ ; 1 \leq i \leq 6\}$ حيث $\overline{\mu}_1: e < G$, $\overline{\mu}_2: e < \mathbb{Z}_q < G$, $\overline{\mu}_3: e < \mathbb{Z}_p < G$, $\overline{\mu}_4: \mathbb{Z}_p < G$, $\overline{\mu}_5: \mathbb{Z}_q < G$, $\overline{\mu}_6: G$. مخطط هاس:



3.7 مبرهنة:

ليكن $\overline{\mu} \in \overline{F(G)}$ معين بالشكل: $\overline{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_r < G$ عندئذ:

1) $\overline{\mu}$ ذرة إذا, وفقط إذا, $H_1 = e$

2) $\overline{\mu}$ ثنوي ذرة إذا, وفقط إذا, $\overline{\mu} = \overline{\chi_{H_r}}$ حيث H_r ثنوي ذرة في $L(G)$.

3) $\overline{\chi_{H_1}} \prec \overline{\mu} \prec \overline{\chi_{H_r}}$

البرهان:

1) لدينا $\overline{\chi_{H_1}} < \overline{\mu}$ وبما أن $\overline{\mu}$ ذرة فإن $\overline{\chi_{H_1}} = \overline{\chi_e}$ أي $H_1 = e$.

العكس: بفرض أن$\overline{\sigma}: M_1 < M_2 < \cdots < M_t = G$ يحقق $\overline{\sigma} \leq \overline{\mu}$ هذا يعني إما $\overline{\sigma} = \overline{\mu}$ أو $M_t \leq e$ أي $\overline{\sigma} = \overline{\chi_e}$.

2) لدينا $\overline{\mu} \leq \overline{\chi_{H_r}} < \overline{\chi_G}$ وبما أن $\overline{\mu}$ ثنوي ذرة فإن $\overline{\mu} = \overline{\chi_{H_r}}$ من جهة أخرى وبفرض أن H_r ليست ثنوي ذرة أي يوجد $K \in L(G)$ بحيث$H_r < K$ هذا يعني$\overline{\mu} = \overline{\chi_{H_r}} < \overline{\chi_K} < \overline{\chi_G}$ وهذا غير ممكن.

العكس: بفرض أن$\overline{\sigma}: M_1 < M_2 < \cdots < M_t < G$ يحقق $\overline{\mu} < \overline{\sigma}$ هذا يعني $H_r \leq M_1 < M_2 < \cdots < M_t < G$ وهذا غير ممكن.

3) من الواضح أن $\overline{\chi_{H_1}} \leq \overline{\mu} \leq \overline{\chi_{H_r}}$, من جهة أخرى, على فرض أن هناك $\overline{\eta} \in \overline{F(G)}$ معين بالشكل $\overline{\eta}: K_1 < K_2 < \cdots < K_s < G$ يحقق $\overline{\chi_{H_1}} < \overline{\eta} < \overline{\mu}$ هذا يعني $H_1 \leq K_1 < K_2 < \cdots < K_s \leq H_1$ أي $s = 1$ و $\overline{\chi_{H_1}} = \overline{\eta}$. الآن اذا فرضنا $\overline{\eta}$ يحقق $\overline{\mu} < \overline{\eta} < \overline{\chi_{H_r}}$ هذا يعني $H_r \leq K_1 < K_2 < \cdots < K_s \leq H_r$ أي $s = 1$ و $\overline{\chi_{H_r}} = \overline{\eta}$.

3.8 نتيجة:

ليكن $H, K \in L(G)$ عندئذ:

1) H ذرة في $L(G)$ إذا, وفقط إذا, كان هناك ذرة وحيدة $\overline{\mu} \in \overline{F(G)}$ تحقق $\overline{\mu}: e < H < G$, $\overline{\mu} \prec \overline{\chi_H}$

2) K ثنوي ذرة في $L(G)$ إذا , وفقط إذا , $\overline{\chi_K}$ ثنوي ذرة في $\overline{F(G)}$.

3) H ذرة وثنوي الذرة في $L(G)$ إذا, وفقط إذا , $\overline{\chi_e} \prec \overline{\mu} \prec \overline{\chi_H} \prec \overline{\chi_G}$ حيث $\overline{\mu}: e < H < G$, وحيد يحقق ذلك.

البرهان:

ينتج مباشرة من المبرهنة 3.7 ومن كون $H \prec K \Leftrightarrow \overline{\chi_H} \prec \overline{\chi_K}$.

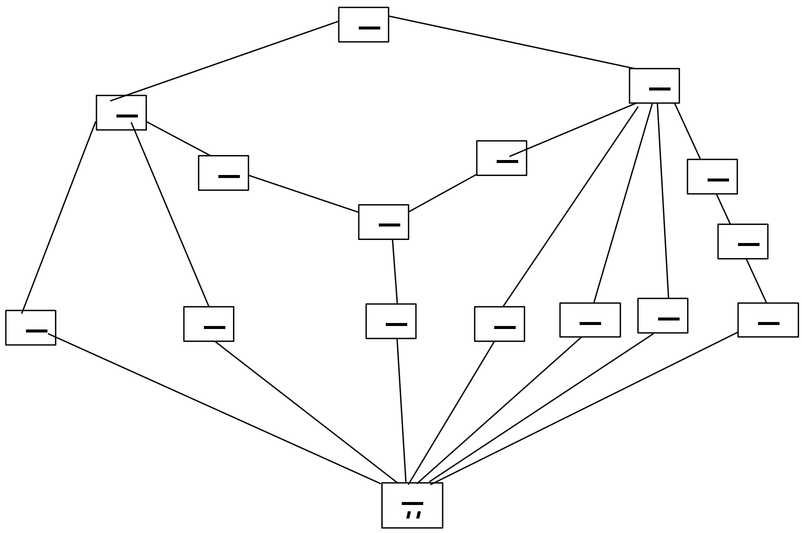
3.9 مثال:

لنأخذ المجموعة $\overline{F(\mathbb{Z}_{p^2q})}$, زمرها الجزئية $H_1 = \mathbb{Z}_p, H_2 = \mathbb{Z}_{pq}, H_3 = \mathbb{Z}_{p^2}, H_4 = \mathbb{Z}_q , e , G$

إنّ $\overline{F(\mathbb{Z}_{p^2q})} = \{\overline{\mu}_i \; ; 1 \leq i \leq 16\}$ حيث:

$\overline{\mu}_1: e < G$, $\overline{\mu}_2: e < H_1 < G, \overline{\mu}_3: e < H_2 < G, \overline{\mu}_4: e < H_3 < G, \overline{\mu}_5: e < H_1 < H_2 < G$,
$\overline{\mu}_6: e < H_1 < H_3 < G, \overline{\mu}_7: e < H_4 < H_2 < G$, $\overline{\mu}_8: e < H_4 < G$, $\overline{\mu}_9: H_1 < H_3 < G$,
$\overline{\mu}_{10}: H_4 < G, \overline{\mu}_{11}: H_1 < H_2 < G, \overline{\mu}_{12}: H_1 < G, \overline{\mu}_{13}: H_3 < G, \overline{\mu}_{14}: H_4 < G, \overline{\mu}_{15}: H_2 < G$, $\overline{\mu}_{16}: G$

مما سبق من نتائج يمكننا القول: $0=\overline{\mu}_1=\overline{\chi_e}$ ، $1=\overline{\mu}_{16}=\overline{\chi_G}$ ، $\overline{\mu}_2,\overline{\mu}_3,\overline{\mu}_4,\overline{\mu}_5,\overline{\mu}_6,\overline{\mu}_7,\overline{\mu}_8$ تمثل ذرات الشبكة, $\overline{\mu}_{13}=$ $\overline{\mu}_{15}=\overline{\chi_{H_2}}$ ، $\overline{\chi_{H_3}}$ تمثل ثنوي الذرات. يمكن تعزيز ذلك من خلال مخطط هاس للشبكة $\overline{F(\mathbb{Z}_{p^2q})}$



10 مبرهنة:

1) إذا كانت L شبكة جزئية من $\overline{F(G)}$ تحقق $L\cong M_{n\geq 2}$ فإنه يوجد $H,K\in L(G)$ بحيث $0_L=\overline{\chi_H}$ ، $1_L=\overline{\chi_K}$ و H ليست أعظمية في K.
2) لا يوجد $n\in\mathbb{N}$ ، $n\geq 2$, يحقق $M_n\cong\overline{F(G)}$.
3) بفرض عدد الذرات في $\overline{F(G)}$هو r عندئذ: $r=\frac{\left|\overline{F(G)}\right|-2}{2}$
4) $\left|\overline{F(G)}\right|$عدد زوجي.

البرهان:

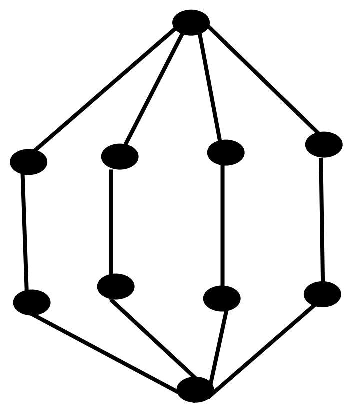
1) بما أن $L\cong M_{n\geq 2}$ فإن من أجل أي $\overline{\mu},\overline{\eta}\in L$ ، فإن $\overline{\mu}+\overline{\eta}=1_L$ و $\overline{\mu}.\overline{\eta}=0_L$ وبما أن $n\geq 2$ فإن L تحوي على الأقل عنصرين غير متقارنين وبالتالي وبحسب النتيجة 3.5 يوجد $H,K\in L(G)$ بحيث $0_L=\overline{\chi_H}$ ، $1_L=\overline{\chi_K}$ و $H<K$ لنبرهن أن H ليست أعظمية في K ، بأخذ $\overline{\mu},\overline{\eta}\in L$ معينان بالشكل $\overline{\mu}: H_1<H_2<\cdots<H_r<G$ ، $\overline{\eta}: K_1<K_2<\cdots<K_s<G$ ، بما أن $0_L=\overline{\chi_H}<\overline{\mu},\overline{\eta}<1_L=\overline{\chi_K}$ فإن $H<H_1<H_2<\cdots<H_r<K$ و $H<K_1<K_2<\cdots<K_s<K$ ، إذا افترضنا أن H أعظمية في K فإن $\overline{\mu}=\overline{\eta}$ وهذا غير ممكن لطالما $n\geq 2$.
2) بفرض أن $M_n\cong\overline{F(G)}$ هذا يعني جميع عناصر $\overline{F(G)}$ (باستثناء $\overline{\chi_e},\overline{\chi_G}$)هي ذرات وثنوي الذرات بآن واحد, إذا أخذنا أحد هذه العناصر وليكن$\overline{\mu}$ معين بالشكل: $\overline{\mu}: H_1<H_2<\cdots<H_r<G$ بما أنه ثنوي ذرة فإن $H_r<G$: $\overline{\mu}=\overline{\chi_{H_r}}$ من جهة أخرى $\overline{\mu}$ ذرة أي $H_r=e$ هذا يعني $\overline{\mu}=\overline{\chi_e}$ وهذا مرفوض.
3) بفرض أن A مجموعة كل الذرات في $\overline{F(G)}$ وB ما تبقى من عناصر $\overline{F(G)}$ باستثناء $\overline{\chi_e},\overline{\chi_G}$ بمعنى $\overline{F(G)}=A\cup B\cup\{\overline{\chi_e},\overline{\chi_G}\}$. بحسب المبرهنة 3.10 الشرط 1 نجد $A\cap B\cap\{\overline{\chi_e},\overline{\chi_G}\}=\emptyset$ كما أن كل عنصر من A يقابل عنصر واحد وواحد فقط من B وذلك بفرض $\overline{\mu}\in A$ معين بالشكل

$\bar{\mu}: e < H_2 < \cdots < H_r < G$ فإنه يعين $\bar{\vartheta} \in B$ بالشكل $\bar{\vartheta}: H_2 < \cdots < H_r < G$ والعكس بفرض $\bar{\mu} \in B$ معين بالشكل $\bar{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_r < G$ $(H_1 \neq e)$ فإنه يعين $\bar{\vartheta} \in A$ بالشكل $\bar{\vartheta}: e < H_1 < \cdots < H_r < G$ وعلى ما تقدم نستنتج $r = |A| = |B|$ أي $\left|\overline{F(G)}\right| = r + r + 2$ وبالتالي $r = \frac{\left|\overline{F(G)}\right| - 2}{2}$

4) ينتج مباشرة من المبرهنة 3.10 الشرط 2.

3.11 مثال:

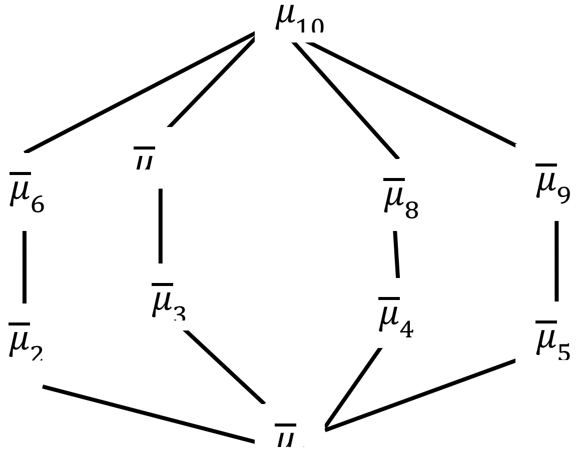
بأخذ الزمرة $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 =< a, b ; a^3 = b^3 = e, ab = ba >$, من المعلوم أن هناك أربع زمر جزئية في $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ جميعها أعظمية, أي جميعها ذرة وثنوي الذرة في الشبكة $L(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ وبالتالي يمكننا القول الشبكة $\overline{F(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)}$ فيها أربع ذرات بالتالي $\left|\overline{F(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)}\right| = 10$, وأربع ثنوي الذرات ومن خلال النتيجة 3.8 يكون مخطط هاس للشبكة $\overline{F(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)}$ موضح بالشكل:



وبشكل مفصل, لدينا الزمر الجزئية هي: $H_1 =< a^2b >, H_2 =< a >, H_3 =< b >, H_4 =< ab >, e , G$ وبالتالي $\overline{F(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)} = \{\bar{\mu}_i \ ; 1 \le i \le 10\}$ حيث:

$\bar{\mu}_1: e < G \ , \bar{\mu}_2: e < H_1 < G, \bar{\mu}_3: e < H_2 < G, \bar{\mu}_4: e < H_3 < G, \bar{\mu}_5: e < H_4 < G, \bar{\mu}_6: H_1 < G,$
$\bar{\mu}_7: H_2 < G, \bar{\mu}_8: H_3 < G, \bar{\mu}_9: H_4 < G, \bar{\mu}_{10}: G$

مخطط هاس للشبكة $\overline{F(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)}$ يعين بالشكل:



3.12 تعريف:

ليكن $H, K \in L(G)$ بحيث $H \subsetneq K \subsetneq G$ نعرف المجموعة $\wp_H^K \subseteq \overline{F(G)}$ بالشكل:

$$\wp_H^K = \{\overline{\chi_H}\,, \overline{\chi_K}\ \ , \overline{\mu}: H < K_1 < \cdots < K_s < K < G\}$$

3.13 مبرهنة:

ليكن $H, K \in L(G)$ بحيث $H \subsetneq K \subsetneq G$ عندئذ, $\wp_H^K$ شبكة جزئية محدودة من $\overline{F(G)}$.

البرهان:

ليكن $\overline{\mu}\,, \overline{\eta} \in \wp_H^K$ عندئذ $\overline{\mu} + \overline{\eta} = \overline{\chi_K}$ و $\overline{\mu}.\overline{\eta} = \overline{\chi_H}$ ومن الواضح أن $\overline{\chi_H}$ و $\overline{\chi_H}$ صفر الشبكة $\wp_H^K$ وواحدها على الترتيب.

3.14 مثال:

لنأخذ الزمرة $G = Q_8$ حيث Q_8 زمرة الرباعيات (quaternion group)؛ $Q_8 = < a, b\ ;\ \ a^2 = b^2\ \ , b\, a = a^{-1}b, a^4 = e >$ أي $Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ الزمر الجزئية منها هي: $H_1 =< a^2 >, H_2 =< a >, H_3 =< b >$, $H_4 =< ab >$, e , G , , بالاستفادة من النتائج السابقة نجد: $\overline{F(Q_8)} = \{\overline{\mu}_I\ ; 1 \le i \le 16\}$ حيث:

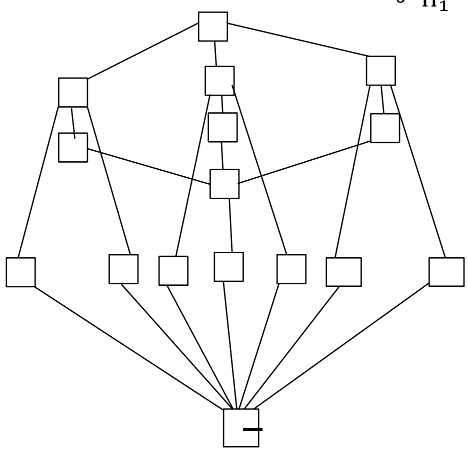
$\overline{\mu}_1: e < G\ \ , \overline{\mu}_2: e < H_1 < G, \overline{\mu}_3: e < H_4 < G, \overline{\mu}_4: e < H_3 < G, \overline{\mu}_5: e < H_2 < G,$

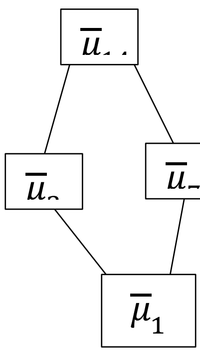
$\overline{\mu}_6: e < H_1 < H_3 < G, \overline{\mu}_7: e < H_1 < H_4 < G, \overline{\mu}_8: e < H_1 < H_2 < G, \overline{\mu}_9: H_1 < H_3 < G,$

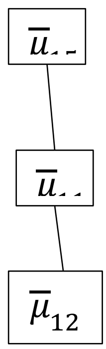
$\overline{\mu}_{10}: H_1 < H_4 < G, \overline{\mu}_{11}: H_1 < H_2 < G, \overline{\mu}_{12}: H_1 < G, \overline{\mu}_{13}: H_3 < G, \overline{\mu}_{14}: H_4 < G, \overline{\mu}_{15}: H_2 < G, \overline{\mu}_{16}: G$

$\wp_e^{H_4} = \{\overline{\mu}_3, \overline{\mu}_7, \overline{\mu}_1, \overline{\mu}_{14}\}\ , \wp_{H_1}^{H_2} = \{\overline{\mu}_{11}, \overline{\mu}_{12}, \overline{\mu}_{15}\}$

مخطط هاس للشبكات $\overline{F(Q_8)}$, $\wp_e^{H_4}$, $\wp_{H_1}^{H_2}$







$\wp^{H_4}$ $\wp^{H_2}$

3.15 مبرهنة:

ليكن $H, K \in L(G)$ بحيث $H \subsetneq K \subsetneq G$,عندئذ

1) $|\wp_H^K| \geq 3$
2) H أعظمية في K إذا, وفقط إذا , $\wp_H^K$ سلسلة.
3) K ذرة إذا, وفقط إذا , $\wp_e^K$ سلسلة.
4) $\wp_H^K \cong M_{r-2}\ ;\ r = |\wp_H^K|$

البرهان:

1) لدينا $\{\overline{\chi_H}, \overline{\chi_K}\ ,\overline{\mu}: H < K < G\} \subseteq \wp_H^K$ أي $|\wp_H^K| \geq 3$
2) بفرض أن H أعظمية في K هذا يعني $\wp_H^K = \{\overline{\chi_H}, \overline{\chi_K}\ ,\overline{\mu}: H < K < G\}$ وهي سلسلة. العكس, بفرض H ليست أعظمية في K أي هناك $S \in L(G)$ تحقق $H < S < K$, بأخذ $\overline{\vartheta}, \overline{\mu} \in \wp_H^K$ معينان بالشكل $\overline{\mu}: H < K < G$, $\overline{\vartheta}: H < S < K < G$ من الواضح أنهما غير متقارنين وهذا يناقض مفهوم السلسلة.
3) ينتج مباشرة من المبرهنة 3.15 الشرط 2 ومن كون K ذرة إذا, وفقط إذا, e أعظمية في K .
4) إذا كان $|\wp_H^K| = 3$ فإن $\wp_H^K = \{\overline{\chi_H}, \overline{\chi_K}\ ,\overline{\mu}: H < K < G\}$ أي $\wp_H^K \cong M_1$ إذا كان $|\wp_H^K| > 3$ فإن هناك على الأقل $\overline{\vartheta}, \overline{\mu} \in \wp_H^K$ معينان بالشكل $\overline{\mu}: H < K_1 < \cdots < K_s < K < G$ و $\overline{\vartheta}: H < R_1 < \cdots < R_t < K < G$ على فرض أن $\overline{\vartheta}, \overline{\mu}$ متقارنين هذا يعني $H < K$ وهذا غير ممكن. نستنتج أن جميع عناصر $\wp_H^K$ الفعلية غير متقارنة.

3.16 نتيجة:

$$|\wp_H^K| = 3 \Leftrightarrow H \text{ أعظمية في } K \Leftrightarrow \wp_H^K \text{ سلسلة} \Leftrightarrow \wp_H^K = \{\overline{\chi_H}, \overline{\chi_K}\ ,\overline{\mu}: H < K < G\}$$

البرهان:

ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة.

3.17 مبرهنة:

ليكن r عدد الزمر الفعلية في G عندئذ القضايا الآتية متكافئة:

1) $L(G) \cong M_r$
2) $\wp_H^K$ سلسلة من أجل كل $H, K \in L(G)$
3) $\overline{F(G)} \cong S_r$

البرهان:

$1 \Leftarrow 2$() بأخذ $\wp_H^K$ حيث $H, K \in L(G)$ تحققان $H \subsetneq K \subsetneq G$, بما أن $L(G) \cong M_r$ فإن K ذرة وهذا يعني $H = e$ وأكثر من ذلك H أعظمية في K إذن وبحسب النتيجة 3.16 فإن $\wp_H^K$سلسلة.

($2 \Leftarrow 1$) من أجل أي $K \in L(G)$ لدينا $\wp_e^K$ سلسلة وبحسب المبرهنة 3.15 الشرط 3 نجد K ذرة أي جميع عناصر $L(G)$ الفعلية ذرات وبالتالي ثنوي الذرات وعددها r أي $L(G) \cong M_r$.

($3 \Leftarrow 2$) بفرض أن $H_i\ ; 1 \leq i \leq r$ الزمر الفعلية في G بفرض $S_i = \{\overline{\chi_{H_i}}, \overline{\mu_i}: e < H_i < G\}$, $1 \leq i \leq r$, سلسلة مكونة من عنصرين. كما أن $\cap_{i=1}^r S_i = \emptyset$. الآن لنبين أن $\cup_{i=1}^r S_i = \overline{F(G)} \setminus \{\overline{\chi_e}, \overline{\chi_G}\}$ من الواضح أن $\cup_{i=1}^r S_i \subseteq \overline{F(G)} \setminus \{\overline{\chi_e}, \overline{\chi_G}\}$ من جهة أخرى بفرض $\overline{\mu} \in \overline{F(G)} \setminus \{\overline{\chi_e}, \overline{\chi_G}\}$ معين بالشكل: $\overline{\mu}: H_1 < H_2 < \cdots < H_t < G$ بالتالي $\overline{\mu} \in \wp_{H_1}^{H_t}$ لدينا $\wp_e^{H_t}$ سلسلة أي H_t ذرة بالتالي $\overline{\mu} = \overline{\chi_t}$ أو معين بالشكل $\overline{\mu}: e < H_t < G$ أي يوجد $1 \leq t \leq r$ بحيث $\overline{\mu} \in S_t$ هذا يعني $\overline{F(G)} \setminus \{\overline{\chi_e}, \overline{\chi_G}\} = \cup_{i=1}^r S_i$. لنجد أن $\overline{F(G)}$ مكونة من r سلسلة

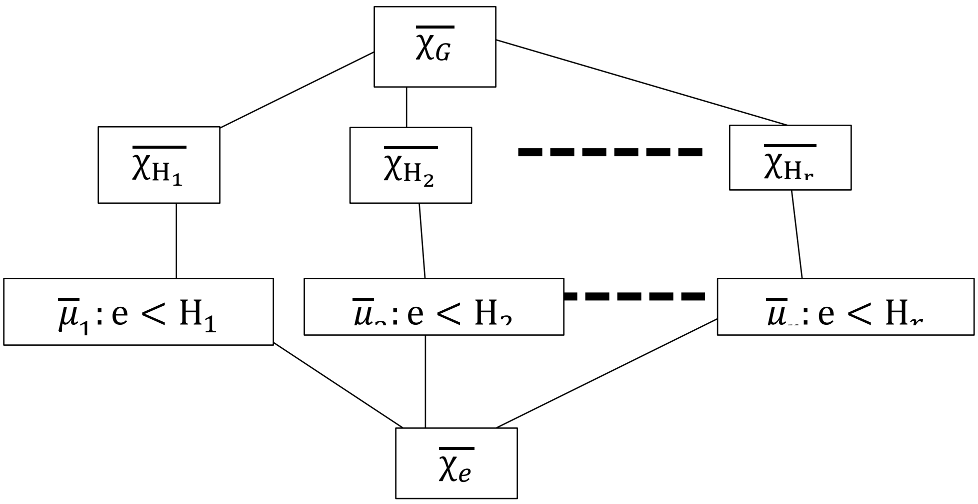
كل منها يحوي عنصرين أي $\overline{F(G)} \cong S_r$.(3 ⇐ 2) بما أن $\overline{F(G)} \cong S_r$ فإنه من أجل أي عنصرين $\overline{\mu}, \overline{\eta} \in \overline{F(G)}$ إما أن يكونا متقارنين أو $\overline{\mu} + \overline{\eta} = \overline{\chi_G}$. الآن ليكن $H, K \in L(G)$ بحيث $H \subsetneq K \subsetneq G$ لدينا $\{\overline{\chi_H}, \overline{\chi_K}, \overline{\mu}: H < K < G\} \subseteq \wp_H^K$ وبفرض أن $\overline{\eta} \in \wp_H^K$ بحيث $\overline{\eta} \notin \{\overline{\chi_H}, \overline{\chi_K}, \overline{\mu}: H < K < G\}$ بما أن $\wp_H^K$ شبكة جزئية فإن $\overline{\mu} + \overline{\eta} = \overline{\chi_K} \neq \overline{\chi_G}$ وهذا غير ممكن بالتالي $\wp_H^K = \{\overline{\chi_H}, \overline{\chi_K}, \overline{\mu}: H < K < G\}$ وهذا يعني $\wp_H^K$ سلسلة من أجل كل $H, K \in L(G)$.

3.18 نتيجة:

إذا كان $\overline{F(G)} \cong S_r$, r عدد الزمر الفعلية في G فإن

1) $\left|\overline{F(G)}\right| = 2(r+1)$

2) مخطط هاس لـ $\overline{F(G)}$ يعين بالشكل:

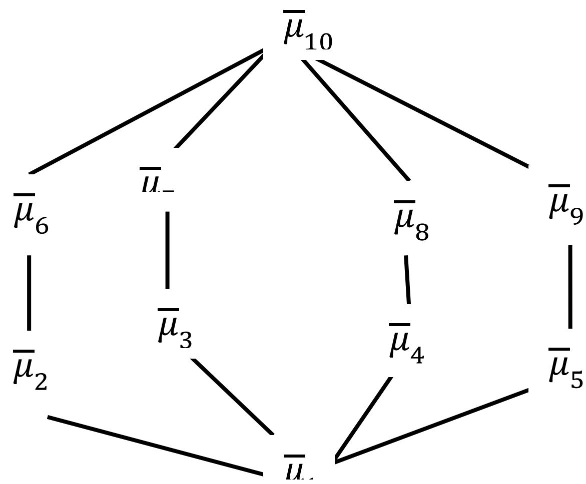


البرهان:

ينتج مباشرة من المبرهنة 3.10 والنتيجة 3.16 والمبرهنة 3.17.

3.19 مثال:

لنأخذ المجموعة $\overline{F(S_3)}$, لدينا $L(S_3) \cong M_4$ وبالتالي $\overline{F(S_3)} \cong S_4$, وهذا يعني $\left|\overline{F(G)}\right| = 2(r+1) = 10$ أي $\overline{F(S_3)} = \{\overline{\mu}_i \ ; 1 \leq i \leq 10\}$ وبالتالي مخطط هاس يعين بالشكل:



حيث: $H_1 =< (12) >, H_2 =< (13) >, H_3 =< (23) > \ , H_4 = (123)$
$\overline{\mu}_1: e < G \ , \overline{\mu}_2: e < H_1 < G, \overline{\mu}_3: e < H_2 < G, \overline{\mu}_4: e < H_3 < G, \overline{\mu}_5: e < H_4 < G, \overline{\mu}_6: H_1 < G,$
$\overline{\mu}_7: H_2 < G, \overline{\mu}_8: H_3 < G, \overline{\mu}_9: H_4 < G, \overline{\mu}_{10}: G$

3.20 نتيجة:

لتكن G زمرة و p,q أوليان مختلفان. $\overline{F(G)} \cong S_n$ إذا, وفقط إذا, تحققت إحدى القضايا الآتية:

1) $n = 1$ و $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$.
2) $n = 2$ و $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.
3) $n = p + 1$ و $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
4) n=p+1 و $G \cong < d >_q \ltimes < c >_p$ ؛ $q|p-1$, $dc = c^t d$, $t \not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, $t^q \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, كما أن G تحوي بالضبط زمرة جزئية واحدة من المرتبة p و p زمرة جزئية من المرتبة q.

البرهان:

بما أن $\overline{F(G)} \cong S_n$ فإنه وبحسب المبرهنة 3.17 $L(G) \cong M_r$ وهذا يعني وبحسب المبرهنة 2.8 والمبرهنة 2.9 نحصل على المطلوب

3.21 مثال:

لنأخذ الزمرة S_3 بحسب النتيجة 3.18 و3.20 نجد أنّ الزمرة S_3 تحوي زمرة واحدة فقط من المرتبة 3 وتحوي ثلاث زمرة جزئية من المرتبة 2 وكما هو معلوم أنّ الزمرة A_3 هي زمرة جزئية من المرتبة 3 بالتالي: $\forall A < S_3 \ \Rightarrow \ A = A_3 \ \text{or} \ A \cong \mathbb{Z}_2$.

3.22 مثال:

بأخذ الزمرة $G =< a >_3 \ltimes < b >_{91} \ ; (ab)^3 = 1 \ , a^{-1}ba = b^9$ بما أن G ليست تبديلية و 91 غير اولي فإنه لا يوجد $n \in \mathbb{N}$ يحقق $\overline{F(G)} \cong S_n$, لكن بأخذ الزمرة الجزئية M بالشكل $M =< ab, b^7 >=< ab >_3 \ltimes < b^7 >_{13} ; (ab)^{-1}b^7ab = (b^7)^9$ لنجد أن $\overline{F(M)} \cong S_{14}$ ويمكن ملاحظة أن $p = 13 , q = 3 , t = 9$ تحقق ما ورد في المبرهنة 3.20 الشرط4 حيث 3 يقسم 12 و $(ab)b^7 = (b^7)^9(ab)$, $9 \not\equiv 1(\mathrm{mod}13)$, $9^3 \equiv 1(\mathrm{mod}13)$ كما أن M تحوي زمرة جزئية وحيدة من المرتبة 13 هي $< b^7 >$ وتحوي 13 زمرة من المرتبة 3 وهي $G_i =< ab^i >; 1 \le i \le 91 , i \equiv 1(\mathrm{mod}7)$

ملاحظة:

مما سبق يمكن توصيف الزمرة G من خلال الشبكة $\overline{F(G)}$ وذلك عند توفر شروط معينة مثل $\overline{F(G)} \cong S_n$. من أجل n=1 أو n=2 فإن G تبديلية وأكثر من ذلك G دوارة. وإذا كان $n \neq 2$ فإن G تبديلية إذا, وفقط إذا, كانت مرتبة G تملك قاسماً أولياً وحيداً. كما أنه من غير الممكن أن يكون لمرتبة G ثلاثة قواسم أولية فأكثر.

4. توصية:

في النتيجة 3.20, نعتقد أن مثل هكذا توصيف سيطور نتائج سابقة حول تحديد قدرة المجموعة $\overline{F(G)}$ لا سيما تلك النتائج الواردة بالمراجع [1], [4], [9], [11], [12], [13] حيث تركّز معظمها على حالات خاصة من الزمر ذات الجداء شبه المباشر الداخلي وبالتالي يمكن الاستفادة من نتائجنا(3.10, 3.18, 3.20) لتطوير و تعميم تلك الدراسات.

5.المراجع العلمية:

1. Ahmad, A.G., (2021) The number of fuzzy subgroups of finite cyclic groups, International Mathematical Forum,6(20), 987–994.
2. Alhalaqi, A. and Hanano,A., (2015)Equivalence classes lattice of fuzzy subgroups. Damascus University Journal For Basic Science, accepted for publication.
3. Alhalaqi, A. and Hanano,A., (2017) Some Properties On The Lattice Of Fuzzy Group Equivalence Classes. Damascus University Journal For Basic Science, accepted for publication.
4. Ajmal,N. and Thomas,K.V., (1994) The lattices of fuzzy subgroups and fuzzy normal subgroups, Inform. Sci. 76 ,1-11.
5. Darabi,H. and Imanparast ,M., (2013)Counting number of fuzzy subgroups of some of dihedral groups,Ijpam.V.85No. 3, 563-575.
6. Grätzer, G., (1978) General Lattice Theory, Academic Press, New York.
7. Humera,B. and Raza ,Z., (2013)On fuzzy subgroups of finite abelian groups, International Mathematical Forum, Vol. 8, no. 4, 181 – 190.
8. Palfy, P., (2003) Groups And Lattices, London Math. Soc. Lecture Notes Ser., Vol. 305,Cambridge University Press, 428-454.
9. Prawoto,B.P., (2024)The number of fuzzy subgroups of rectangle groups, International Journal of Algebra, Vol. 8, no. 1, 17 – 23.
10. Ratanaprasert, C.,(2009) A Characterization Of Groups Whose Lattices Of Subgroups Are N-M_{p+1} Chains For All Primes P, Silpakorn U Science & Tech J 3(2), 42-47.
11. Sulaiman,R., (2012)Constructing fuzzy subgroups of symmetric groups S4 International Journal of Algebra, Vol. 6, no. 1, 23 – 28.
12. Sulaiman,R. and Ahmad, A.G., (2010) Counting fuzzy subgroups of symmetric groups S_2, S_3 and alternating group A_4, J. Quality Measurement and Analysis, 6, 57 - 63.
13. Tarnauceanu,M., (2012)Classifying fuzzy subgroups of finite non-abelian groups, Iranian Journal Of Fuzzy Systems Vol. 9, No. 4, 33-43.
14. Zhang,Y. and Zou,K., (1997)A note on an equivalence relation on fuzzy subgroups,Fuzzy Sets and Systems, 95,243-247.