حساب البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة مقاربة (محسوبة بشكل تقريبي) لنقطة تنتمي لهذه المجموعة

د. شوقي محمد الراشد*

الملخص

نعرض في هذا البحث خوارزمية تستخدم القواعد الأساسية "Groebner’sBases" والتي تُعد أحد المفاهيم الأساسية في الجبر التبادلي والهندسة الجبرية، وذلك من أجل حساب البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة مقاربة (محسوبة بشكل تقريبي) لنقطة تنتمي لهذه المجموعة.

تُعد هذه الخوارزمية تحسيناً لخوارزميات أخرى [1,3,5] ، حيث إن الخوارزمية في [1] هي تحسين للخوارزميتين في [3,5] و ذلك بعدد خطوات أقل في حالة استخدام دالة الـ Homotopy ودون الحاجة إلى مفهومي Triangular set وWitness Point Sets وخاصة الاستمرار في دالة الـ Homotopy، ولكنها تُنفَّذ في نظامي جبر كمبيوتر، بالإضافة إلى أن جميع الخوارزميات في [1,3,5] تتطلب أن تكون جملة كثيرات الحدود التي تُعرف المجموعة الجبرية ، مربعة (عدد المجاهيل يساوي عدد كثيرات الحدود)، لذلك يتم البدء باختزال جملة كثيرات الحدود

* أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة AIU (Arab International University) ، عضو هيئة تدريسية في جامعة دمشق.

إلى جملة مربعة، بينما في الخوارزمية المعروضة في هذا البحث لا حاجة إلى هذه الخطوة وهذا هو التحسين الأول، كما أن عدد الخطوات فيها أقل وذلك من خلال استخدام المبرهنة(3−3) ويمثل هذا التحسين الثاني، بالإضافة إلى استخدام المبرهنة (3−2) التي تُبيّن أن البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة منها أكبر أو يساوي البُعد المحلي لهذه المجموعة الجبرية عند نقاط في جوار هذه النقطة والاستغناء عن دالة الـ Homotopy مما يسمح تنفيذ الخوارزمية في نظام جبر كمبيوتر واحد فقط $SINGULAR$ وهذا يمثل التحسين الثالث.

الكلمات المفتاحية: المجموعة الجبرية، بُعد Krull، البُعد المحلي، قواعد Groebner، رتبة جملة كثيرات حدود. التصنيف الرياضياتي (2010) AMS : 14A20 .

Compute the local Dimension of an Algebraic Set at a Approximated Point to a Point belonging to this Algebraic Set

Dr. Shawki M. AL Rashed*

Abstract

In this paper we present an algorithm, which is usedthe standard bases "Groebner's Bases", that considers one of the basic concepts of the commutative algebra and algebraic geometry, to compute the local dimension of an algebraic set at an approximate point of a point belonging to this set.

This algorithm is an improvement of other algorithms [1,3,5]. Where the algorithm in [1] is an improvement of the algorithms in [3,5] with fewer steps in the Homotopy function, without the use of the Triangular set and Witness Point Sets, and the continuity of the Homotopyfunction.But they are implemented in two computer algebra systems, in addition to that all the algorithms in [1,3,5] require that the polynomial system that defines the algebraic set is square (the number of unknowns equals the number of polynomials). Therefore, they start to

∗Associate Professor at Arab International University AIU, Academic Staff at Damascus University

reduce the polynomial system to square system.While in the algorithm presented in this research there is no need for this step and this first improvement, and the number of steps is lower by using the theorem (3.3), this second improvement. In addition to the use of a theorem (3.2) showing that the local dimension of the algebraic set at a point greater than or equal to the local dimension of this algebraic set at points that sufficiently close to this point and dispensing with the homotopy function , which is allowing the implementation of the algorithm in the SINGULAR only one computer algebra system and this third improvement.

Keywords: algebraic set, Krill'sdimension, local dimension, Greener Bases, rank of a polynomial system.
Mathematical ClassifyAMS (2010): 14A20

المقدمة:

إن الكثير من الحسابات في المجالات الهندسية والعلوم الأساسية تكون تقريبية بنسبة خطأ ما، ومن هذه الحسابات إيجاد النقاط التي تمثل أصفار كثيرات حدود وتُعرِّف ما يُسمى بالمجموعة الجبرية، فمن المهم معرفة أين وفي أي بُعد (فضاء) تقع هذه النقاط، وكون هذه النقاط محسوبة بشكل تقريبي يجعل من تحديد مكان وجودها على أي مركبة من المركبات المختزلة ذوات الأبعاد المختلفة للمجموعة الجبرية أمراً ليس سهلاً، ولذلك تم استخدام مبرهنة (3−2) تُبيّن أن البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة منها أكبر أو يساوي البُعد المحلي لهذه المجموعة الجبرية عند نقاط في جوار هذه النقطة.

بداية نعرض بعض التعاريف والخصائص اللازمة في هذا البحث [1,4,7,9,11,12] .

لتكن $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots\dots, x_N]$ حلقة كثيرات الحدود ذات N متغير والمعرّفة على حقل الأعداد العقدية (المركبة) $\mathbb{C}$، و $F = \{\ \ _1, f_2, \dots\dots, f_n\} \subseteq R$ مجموعة مؤلفة من n كثير حدود . يُعرّف المثالي الموّلد بهذه المجموعة بالشكل

$$I =< F >=< f_1, f_2, \dots\ \ , f_n >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i f_i :\ g_i \in R \right\}$$

تُعرّف المجموعة الجبرية المُعرفة بالمثالي I على أنها مجموعة جزئية من $\mathbb{C}^N$ ومكونة من أصفار كثيرات الحدود في المثالي I ، وتُرمز بـ :

$$V(I) = \{ p = (p_1, p_2 , ... , p_N) \in \mathbb{C}^N : f(p) = 0 , \forall f \in I \}$$

وفي حالة $I =< F >=< f_1, f_2, ... , f_n >$ يكون

$$V(I) = V < F >= V < f_1, f_2, ... , f_n >$$

وذلك لأنه

$$\forall f \in I: \exists r_1 , r_2 , ... , r_n \in R : \quad f = r_1 f_1 + r_2 f_2 + \cdots + r_n f_n$$

وبالتالي

$$p \in V(I) \Leftrightarrow f_i(p) = 0 , \forall i \in \{1, 2, ... , n\} \Leftrightarrow p \in V(F)$$

إن بُعد المجموعة الجبرية في الفضاء $\mathbb{C}^N$ هو ذاته بُعد المثالي الذي يُعرف هذه المجموعة، وأحد الطرائق الجبرية المستخدمة من أجل تعريف البُعد هو بُعد $Krull$ للحلقة $[12, page\ 35 + 205]$.

تعريف: ليكن I مثالياً في حلقة كثيرات الحدود $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, ... , x_N]$ ذات N متغير والمعرّفة على حقل الأعداد العقدية (المركبة) $\mathbb{C}$. إن العدد غير السالب

$$n := Sup\{ k : P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots ... . . \subsetneq P_k : P_i \in Spec(R) , 0 \le i \le k\}$$

يُسمى بُعد $Krull$ للحلقة R ويُرمز بـ$\dim(R)$، حيث $Spec(R)$ مجموعة كل المثاليات الأولية في الحلقة R .

وبُعد المثالي I يُعرف على أنه بُعد حلقة القسمة $\frac{R}{I}$ أي إن $\dim(\ ) = \ \ \dim\left(\frac{R}{I}\right)$.

عندئذٍ يكون $\dim(X) = \dim(I)$، حيث $X = V(I) \subseteq \mathbb{C}^N$ المجموعة الجبرية المولَدة بالمثالي I .

إن المجموعة الجبرية X تُحَلّل إلى مجموعات جبرية X_i حيث $0 \leq i \leq \dim(X)$، والتي بدورها X_i تُحلل إلى مجموعات (مركبات) غير قابلة للاختزال X_{ij} حيث $\dim(X_{ij}) = i$. أي إن

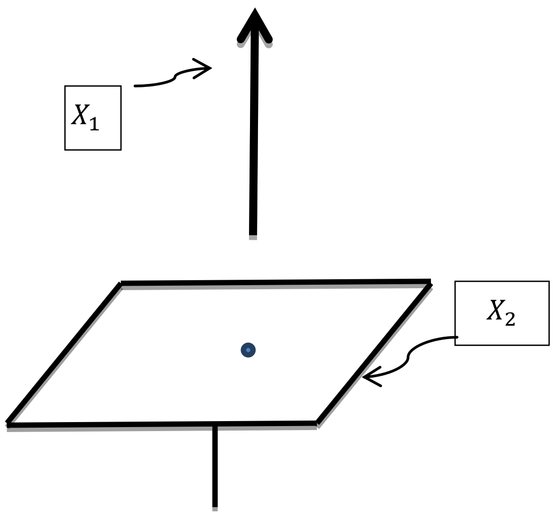
$X = \bigcup_{i=0}^{d} X_i = \bigcup_{i=0}^{d}\left(\bigcup_{j=1}^{d_i} X_{ij})\right)$ ، حيث X_{ij}مجموعة خالية أو مجموعة جبرية غير قابلة للاختزال بُعدها i في الفضاء $\mathbb{C}^N$.

ويسمى هذا التحليل $X = \bigcup_{i=0}^{d} X_i = \bigcup_{i=0}^{d}\left(\bigcup_{j=1}^{d_i} X_{ij})\right)$ التحليل الجبري المختزل للمجموعة الجبرية X .

يُعرف البعد المحلي "local dimension" لمجموعة جبرية X عند نقطة $p \in X$ على أنه بعد المركبة ذات البعد الأكبر التي تنتمي إليها هذه النقطة ويرمز له بـ$\dim_p X$، أي

$$\dim_p(X) = \sup\left\{i : \quad i = dim(X_{ij}), p \in X_{ij}, X = \bigcup_{i=0}^{d}\left(\bigcup_{j=1}^{d_i} X_{ij})\right)\right\}$$

مثال$R = \mathbb{R}[x, y, z]$: ، $I =< f_1 , f_2 >$، حيث $f_1 = xz , f_2 = yz$.
عندئذٍ: $I =< x, y >\cap< z >$ والمجموعة الجبرية $X = V(I) = \bigcup_{i=0}^{2} X_i$ المولّدة بالمثالي I تُحلل إلى مجموعات جبرية $X_2 = V(< z >)$ مركبة غير قابلة للاختزال بُعدها 2 (تمثل المستوي oxy في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$) ومجموعة جبرية $X_1 = V(< x, y >)$ مركبة غير قابلة للاختزال بُعدها 1 (تمثل المحور oz في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$)، و$X_0 = \emptyset$ المجموعة الخالية .البعد المحلي للمجموعة الجبرية X عند النقطة $p = (1,2,0)$ هو $\dim_p(X) = 2$، وذلك لأن $p \in X_2$.



1. **قاعدة "$Groebner$"**: يوجد العديد من التطبيقات لقواعد $Groebner$ في الجبر التبادلي والهندسة الجبرية ونظرية الشواذ ، في هذا البحث سنستخدم أحد التطبيقات وهو إيجاد بُعد المجموعة الجبرية [1,7,9,10,12].

لتكن $>$ علاقة ترتيب على مجموعة الحدوديات $Mon(R) = \{x^{\alpha} \ : \ \alpha \in \mathbb{N}^N\}$ و $f = a_{\alpha}x^{\alpha} + a_{\beta}x^{\beta} + a_{\gamma}x^{\gamma} + \cdots \ldots + a_{\delta}x^{\delta} \in R$ مجموعاً منتهياً من الحدوديات غير الصفرية والتي تُكتب بشكل وحيد بالنسبة لعلاقة الترتيب $>$ ، حيث:

$$x^{\alpha} > x^{\beta} > x^{\gamma} > \cdots \ldots > x^{\delta} \text{ و } R = \mathbb{C}[x_1 , x_2 , \ldots. \ , x_N]$$

$$\alpha = (\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots. \ , \alpha_N) \in \mathbb{N}^N \text{ و} x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} , \ldots . x_N^{\alpha_N} \text{ و}$$

و $a_{\alpha}, a_{\beta}, a_{\gamma}, \ldots \ldots, a_{\delta} \in \mathbb{C}$.

- إن علاقة الترتيب $>$ شاملة "$Global$" إذا وفقط إذا كان $1 < x^{\alpha}$ وذلك أياً كان $(0,0,\ldots,0) \neq \alpha \in \mathbb{N}^N$. مثلاً الترتيب المعجمي الدرجي "dp: degree lexicographical ordering"
- إن الحد القائد لـ f "$leadingterm$" يرمز بـ $LT(f) = a_{\alpha}x^{\alpha}$.

ملاحظة: إن علاقة الترتيب $>$تُسمى محلية"$local$" إذا وفقط إذا كان $1 > x^{\alpha}$ وذلك أياً كان $(0,0,\ldots,0) \neq \alpha \in \mathbb{N}^N$ ، مثلاً الترتيب المعجمي الدرجي العكسي "ds: negative degree reverse lexicographical ordering"

تعريف[1,7,9,10,12]: ليكن $I = < F >$ مثالياً مولداً بمجموعة كثيرات الحدود $F = \{f_1, f_2, \ldots \ , f_n\}$ في حلقة كثيرات الحدود $R = \mathbb{C}[x_1 , x_2 , \ldots. \ , x_N]$، و $I \supseteq \{g_1 , g_2 , \ldots \ , g_l\} = G \neq \emptyset$ و$>$ علاقة ترتيب شاملة .

- إن مجموعة كل الحدود القائدة لعناصر المثالي I تولد مثالياً في الحلقة R يُرمزله بـ $LT(I)$ ، أي : $LT(I) = \{LT(f):\ f \in I\}$
- المجموعة المنتهية G تسمى قاعدة $Groebner$ (أو قاعدة قياسية "standard basis") للمثالي I إذا وفقط إذا كان

$$LT(I) =< LT(g_1), LT(g_2)\ ,\ \ \ldots\ldots, LT(g_l) >$$

العلاقة بين المثالي وقاعدته القياسية تُعرض من خلال ("$Buchberger'sCriterion$") [7,9,10,12] والتي تبيّن بأن المثالي موّلد بهذه القاعدة والتي تكون مجموعة أصغرية بالنسبة إلى علاقة الترتيب $<$ ، أي إنه إذا كانت G قاعدة قياسية للمثالي I ، فإن $I =< G >$ حيث G أصغر مجموعة جزئية في I (بالنسبة إلى علاقة الترتيب) تولد المثالي I، حيث إنّ $\dim\left(\frac{R}{I}\right) = \dim\left(\frac{R}{L(I)}\right) (Corollary(5.3.14)in[12])$.

إن خوارزمية حساب بُعد مجموعة جبرية تعتمد على حساب القاعدة القياسية للمثالي في حلقة مُعرف عليها علاقة ترتيب "$Global$" أما خوارزمية حساب البعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ فتعتمد على حساب القاعدة القياسية للمثالي في حلقة مُعرَّف عليها علاقة ترتيب "$Local$" وإجراء تطبيق في هذه الحلقة ينقل كل x_i إلى $x_i - p_i$ من أجل كل $i \in \{1, 2, \ldots\ldots, N\}$ ، وكلتا الخوارزميتين منفذتان في نظام جبر الكمبيوتر $SINGULAR$[9] ونعرض مثالاً في هذا النظام يبّين كيفية حساب بُعد المجموعة الجبرية $X = V(I)$ وحساب البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة منها .

1−2 مثال: ليكن $\boldsymbol{I} =< \boldsymbol{f_1} , \boldsymbol{f_2} >$ مثالياً في $\boldsymbol{R} = \mathbb{C}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$
و $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{I})$ المجموعة الجبرية المولدة بـ $\boldsymbol{I}$ ، حيث $\boldsymbol{f_1} = \mathrm{xz}$ ،
$\boldsymbol{f_2} = \mathrm{yz}$. بُعد المجموعة الجبرية $X = V(I)$ ، والبُعد المحلي
$\dim_p(X)$ عند النقطة $p = (0,1,1)$:

2−2

```
ring r=0, (x,y,z),dp;// dp = global monomial ordering
Poly f1 = xz;
Poly f2 = yz;;
Ideal   I = f1 , f2;
dim(std(I)); ===>      2
ring R = 0,(x,y,z),ds;   // ds = local monomial ordering
Poly f1 = xz;
Poly f2 = yz;;
Ideal   I = f1 , f2;
map phi = R, x, y, z-1;
dim(std(phi(i)));===>      1
```

1. **الخوارزمية:** . إنّ الخوارزمية التي تم عرضها في [1]تبدأ من $d = \dim(X)$ بعد المجموعة الجبرية ولكنها تعتمد على استخدام نظامي جبر كمبيوتر $Bertini$و$SINGULAR$، بينما الخوارزمية في [6] تبدأ من N عدد المتغيرات معتمدة فقط على دالة الـ "*Homptopy*" ويكون $d < N$ حيث إن الاولى توفر الوقت، والخوارزمية في [3] تعتمد على كل من مفهوم "$Witness\ point\ super\ sets$" و"*triangular sets*" التحليل العددي المختزل للمجموعات الجبرية والقواعد القياسية وأيضاً على صفة الاستمرارية في دالة الـ "*Homptopy*" وتستخدم كذلك نظامي جبر كمبيوتر

[5] $Bertini$ و $SINGULAR$، وجميع الخوارزميات التي تحسب البعد المحلي تعتمد على تقاطع المجموعة الجبرية مع فضاء آخر يمر من النقطة المراد حساب البعد المحلي عندها والتي سنعرضها فيما يلي.

نعرض خوارزمية تبدأ من بُعد المجموعة الجبرية من خلال إجراء تقاطع للمجموعة الجبرية X مع فضاء خطي L يحوي النقطة $p \in \mathbb{C}^N$ المراد حساب البعد المحلي عندها باستخدام القواعد القياسية فقط وتنفيذها في نظام جبر كمبيوتر واحد "$SINGULAR$".

إن فكرة التقاطع مبنية على أن الفضاء L_d الذي بعده $N-d$ يتقاطع مع المركبات ذات البعد d في عدد منتهٍ من النقاط ولن يتقاطع مع أي مركبة أخرى بعدها أصغر من d، والفضاء L_{d-1} الذي بُعده $N-(d-1)$ يتقاطع مع المركبات ذات البعد $d-1$ في عدد منتهٍ من النقاط ولن يتقاطع مع أي مركبة أخرى بعدها أصغر من $d-1$ وهكذا . حيث إن $\mathbb{C} = L_0 \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \ldots\ldots \supseteq L_d$ وكلاً منها معرف بالشكل $A_i \in M_{i\times N}(\mathbb{C})$ و $L_i = V(< A_i.(x-p) >)$.

1-3.مبرهنة [3,13] : لتكن $X = \cup X_i \subseteq \mathbb{C}^N$ اجتماعاً منتهياً لمجموعات جبرية بُعد كلاً منها k . عندئذٍ يوجد مجموعة مفتوحة ("dense Zariski open") تحوي فضاءات خطية $L \subseteq \mathbb{C}^N$ ذات بُعد m تحقق:

1) إذا كان $k+m \geq N$ فإن المجموعة الجبرية $L \cap X$ ذات بُعد $k+m-N$،

2) إذا كان $k+m<N$ فإن المجموعة الجبرية $L\cap X$ تساوي المجموعة الخالية $\emptyset$.

إن كلاً من الفضاءات L_i معرف بالشكل
$A_i \in M_{i\times N}(\mathbb{C})$ و $L_i = V(< A_i.(x-p) >)$ ، أي إن كلاً منها يمر من النقطة p التي هي قيمة تقريبية (محسوبة بشكل تقريبي) لنقطة $\hat{}$ في المجموعة الجبرية X المراد حساب البعد المحلي عندها. العلاقة بين $dim_p(X)$ البعد المحلي عند p و $\dim_{\hat{p}} X$ البعد المحلي عند النقطة $\hat{p}$ تُعرض من خلال المبرهنة التالية.

3–2. مبرهنة[3, 13]: ليكن $\varphi: X\to Y$ تطبيقاً"$holomorphic$" بين فضاءين عقديين. إن أي نقطة $\hat{p}\in X$ يوجد جوار $\hat{p}\in U\subseteq X$ يحقق:

$$\dim_x(X_{\varphi(x)}) \le \dim_{\hat{p}}\left(X_{\varphi(\hat{p})}\right) \ \ ,\forall x\in U$$

حيث $X_{\varphi(\hat{p})} = \varphi^{-1}(\varphi(\hat{p}))$,$X_{\varphi(x)} = \varphi^{-1}(\varphi(x))$.

إن الخوارزمية المعروضة في [1] تبدأ من $d=\dim(X)$ بُعد المجموعة الجبرية ويتناقص حتى الصفر، والخوارزمية في [6] تبدأ من N عدد المجاهيل ويتناقص حتى الصفر.

بينما الخوارزمية المعروضة في هذا البحث تبدأ من d حتى $N-rank(F)$ مما يختزل الوقت والخطوات في الحساب، وذلك حسب المبرهنة الآتية.

3–3. مبرهنة[3, 13]: لتكن $F = \{f_1, f_2, \dots\dots, f_n\} \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots\dots, x_N]$ جملة كثيرات حدود مُعرفة على حقل الأعداد العقدية $\mathbb{C}$. إن جميع المركبات المختزلة للمجموعة الجبرية $X = V(F)$ تملك بُعداً أكبر أو يساوي العدد $N - rank(F)$.

إن $rank(F)$ هي رتبة مصفوفة "$Jacobianmatrix$" عند نقطة من $\mathbb{C}^N$، ويوجد خوارزمية منفذة في نظام جبر الكمبيوتر $SINGULAR$ من أجل حسابها.

3–4 مثال: لتكن $\boldsymbol{F} = \{\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}\}$ مجموعة في $\boldsymbol{R} = \mathbb{C}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ ، حيث $\boldsymbol{f_1} = \mathrm{xz}$ $\boldsymbol{f_2} = \mathrm{yz}$. حساب قاعدة $rank(F)$.

```
ring r=0, (x,y,z),dp;
Poly f1 = xz;
Poly f2 = yz;
Ideal  I = f1 , f2;
Matrix MJ=Jacob(I);
rank(MJ) ;
===>2
```

إن الخوارزميات المعروضة في [1] و[6] تحتاج إلى أن تكون جملة كثيرات الحدود التي تُعرف المجموعة الجبرية هي جملة مربعة (عدد المجاهيل يساوي عدد كثيرات الحدود) فهي تستخدم خوارزمية لتحويل جملة كثيرات الحدود إلى جملة مربعة، بينما الخوارزمية المعروضة في هذا البحث ليست بحاجة إلى ذلك.

<u>الخوارزمية:</u>

- <u>الدخل</u>: مثالي $I =< F >\subseteq C[x_1, x_2, \dots, x_N]$ موّلد بجملة كثيرات حدود $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ المُعرّفة على حقل الأعداد $\mathbb{C}$ ،

النقطة $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N) \in X = V(I)$ المراد حساب البعد المحلي عندها والمحسوبة بتقريب ϵ.

- الخرج: $dim_p(\mathbb{C})$ البُعد المحلي للمجموعة الجبرية المُعرفة بالمثالي I عند نقطة $\hat{p}$ منها والتي تحقق $\| \hat{p} - p \| < \epsilon$، حيث إن ϵ عدد حقيقي موجب صغير(مقدار التقريب المستخدم في حساب p المقاربة للنقطة $\hat{p}$).
- الإجرائية:

1) استخدام قاعدة "$Groebenr$" من أجل حساب العدد $d = dim(X)$ ،
إذا كان $d = N - rank(F)$ ، فإن $dim_p(X) = d$ ، وفي حالة $d \neq N -$ $rank(F)$ نتابع،

2) من أجل $N - rank(F) \leq i \leq d$،(نبدأ من d بشكل تنازلي وهذا له علاقة بالإثبات النظري للخوارزمية)،

i. نُعرف الفضاء الخطي i الذي بعده $N - i$ بالمعادلات الخطية $A_i(x - p) = \{l_1, l_2, \ldots, l_i\}$، حيث $A_i \in M_{i \times N}(\mathbb{C})$ مصفوفة اختيارية $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ ، أي إن $L_i = V(l_1, l_2, \ldots, l_i)$ المجموعة الجبرية المولدة بـ $\{l_1, l_2, \ldots, l_i\}$ ،

ii. نُعرف المثالي $I_i = < f_1, f_2, \ldots, f_n, l_1, l_2, \ldots, l_i >$، و $X \cap L_i =$ $X_i \cap L_i = V(f_1, f_2, \ldots, f_n, l_1, l_2, \ldots, l_i)$

إن الفضاء الخطي L_i يتقاطع مع المركبة الجبرية X_i بعدد منتهٍ من النقاط ولتكن $S_i = \{p_1, p_2, \ldots p_t\}$،

iii. نحسب البعد المحلي $dim_p((I_i))$للمجموعة الجبرية المولّدة بالمثالي i عند النقطة p، إذا كان الناتج i نضع $dim_p(X) = i$ وتنتهي الخوارزمية، هذا

يعني أنه يوجد $p_j \in S_i$ يحقق $\| p - p_j \| < \epsilon$، وإلا نضع $i = d - 1$ ونعود إلى (i) .

الإثبات: بدايةً من الواضح أن الخوارزمية محدودة (منتهية: لا تعمل بلا توقف) وذلك لأنها تبدأ عند $\mathrm{i} = \mathrm{d} \leq \mathrm{N}$ وتنتهي عند $\mathrm{i} = N - rank(F)$.

إذا كان $d = N - rank(F)$، فهذا يعني بأن جميع مركبات المجموعة الجبرية X بُعدها يساوي d، وذلك حسب المبرهنة (3.3)، وبالتالي $\dim_{\mathrm{p}}(\mathrm{X}) = d$.

أما في حالة $\mathrm{d} = \dim(\mathrm{X}) > N - rank(F)$ فإن الخوارزمية تبدأ من $i = d$ وبشكل تنازلي، ومن أجل X_i التي تمثل اجتماعاً للمركبات غير المختزلة للمجموعة الجبرية X المُعرّفة بالمثالي $\mathrm{I} =< F >$ ذات البُعد i ، حيث

$\mathrm{i} \in \{N - rank(F), N - rank(F) + 1, \dots, \mathrm{d}\}$، يتحقق

$$\dim(\mathrm{X_i}) + \dim(\mathrm{L_i}) = \mathrm{i} + (\mathrm{N} - \mathrm{i}) = \mathrm{N}$$

فإن $\mathrm{L_i}$ يتقاطع فقط مع المركبة $\mathrm{X_i}$ بمجموعة بُعدها

$$\dim(\mathrm{X_i} \cap \mathrm{L_i}) = \mathrm{i} + (\mathrm{N} - \mathrm{i}) - \mathrm{N} = 0$$

أي بعدد منته من النقاط ولا يتقاطع مع أي مركبة بُعدها أصغر من i ، وذلك حسب المبرهنة (3−1) ، أي إن $\boldsymbol{S_i} = \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{L_i} = \boldsymbol{X_i} \cap \boldsymbol{L_i} = \{\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}, \dots, \boldsymbol{p_{t_i}}\}$.

فإذا كان يوجد نقطة $\mathrm{p_j} \in \mathrm{S_i}$ تحقق $\| p - p_j \| < \epsilon$ ، من أجل $1 \leq j \leq t_i$ ، فهي تنتمي إلى المركبة $\mathrm{X_i}$ ولا تنتمي إلى $\mathrm{X_k}$، و ذلك $\forall\, \mathrm{k} \in \{N -$

$rank(F), \ldots\ldots, \mathrm{i}-1\}$، لأن $\mathrm{L_i}$ لا يتقاطع مع المركبة $\mathrm{X_k}$، وبما أن الخوارزمية بدأت بشكل تنازلي من أكبر بُعد فإن $\mathrm{p_j}$ لن تنتمي أيضاً لأي مركبة بُعدها أكبر من i .

ومن جهة ثانية $\dim_{\hat{}}(X_i) = \dim_p(X_i) = \dim_{p_j}(X_i)$ حيث النقطة $\hat{p} \cong p_j \in X_i$ ، وذلك حسب المبرهنة (3–2)، وبالتالي يكون البُعد المحلي للمجموعة الجبرية X عند النقطة p هو $\dim_{\mathrm{p}}(\mathrm{X}) = \mathrm{i}$ وبذلك تكون الخوارزمية صحيحة.

3–5. مثال: ليكن $I =< f_1, f_2 >$ مثالياً في $R = \mathbb{C}[x,y,z]$ و $X =$ $V(I)$ المجموعة الجبرية المولدة بـ I، حيث $f_1 = xz$ ، $f_2 = yz$ ومقدار التقريب $\epsilon = 10^{-6}$.

ولتكن $p_1 = (0,0,-1)$ و$p_2 = (1,1,10^{-4})$. المطلوب تحديد البُعد المحلي لـ X عند النقطة p_1، $dim_{p_1}(X)$، والبُعد المحلي لـ X عند النقطة p_2 ،$dim_{p_2}(X)$.

من المثال السابق ((2–1) مثال) $d = \dim(\ \ ) = 2$، ومن المثال (3–4) الرتبة $rank(F) = 2$.

حساب $\boldsymbol{dim}_{\ \ 1}(\boldsymbol{X})$: سنبدأ من $i = 2$، نُعرف فضاءً خطياً حيث

$$L_2 = V(l_1, l_2)$$

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z+2 \\ 2x-y+z+1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S_2 = L_2 \cap X = V(f_1, f_2, l_1, l_2) = \{(0,-2,-3),(0,0,-1)\}}$$

نلاحظ أن $\boldsymbol{p_1 = (0,0,-1)} \in S_2$ وبالتالي يكون البُعد المحلي $\dim_{p_1}(X) = 2$.

حساب $\mathrm{\dim_{p_2}(X)}$: سنبدأ من $\mathrm{i} = 2$، نُعرف فضاءً خطياً $\mathrm{L_2 = V(l_1, l_2)}$ حيث

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-10^{-4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x+2z-1-2(10^{-4}) \\ 2x-y+z-1-10^{-4} \end{pmatrix}$$
$$S_2 = L_2 \cap X = \ V(f_1, f_2, l_1, l_2) =$$
$$= \{q_1 = (1-2(10^{-4}), 1-5(10^{-4}), 0)\ ,$$
$$\mathrm{q}_2 = \left(1+4(10^{-4}), 1+4(10^{-4}), -3(10^{-4})\right)\}$$

نلاحظ أن $\| p_2 - q_1 \| > \epsilon$ و $\| p_2 - q_1 \| > \epsilon$ وبالتالي يكون البُعد المحلي $\dim_{p_2}(X) < 2$

من أجل $i = 1$ ، نُعرف فضاءً خطياً $L_1 = V(l_1)$.

نحسب البُعد المحلي $\dim\ _2(Y_1)$ للمجموعة الجبرية $_1 = V(f_1, f_2\ , l_1)$

عند النقطة p_2 (بشكل مشابه للحساب في المثال(2−1)) فنجد $\dim_{p_2}(Y_1) = 1$

وبالتالي $\dim_{p_2}(X) = 1$.

3.الخاتمة:

الخوارزمية في **[6]** تستخدم فقط دالة الـ "Homotopy" ومنفذة في برنامج واحد "*Bertini*" ولكن تبدأ من $\boldsymbol{N}$ عدد المتغيرات والذي هو أكبر تماماً من بُعد المجموعة الجبرية أي إنها تحتاج إلى عدد أكبر من الخطوات، والخوارزمية في [3] تستخدم القواعد القياسية ومفهوم "Witness point sets" و"triangular sets" وصفة الاستمرارية في دالة الـ "Homotopy" ولكنها منفذة في برنامجي جبر الكمبيوتر "SINGULAR" و"Bertini"، والخوارزمية في [1] تستخدم القواعد القياسية من أجل حساب البُعد ودالة الـ "Homotopy" وتُعد تحسيناً للخوارزميتين السابقتين لأنها تبدأ من بُعد المجموعة الجبرية الذي هو أصغر تماماً من عدد المتغيرات ولكنها أيضا تستخدم نظامي جبر كمبيوتر

"$Bertini$"و "$SINGULAR$"وهي أيضا بحاجة إلى اختزال جملة كثيرات الحدود التي تولّد المثالي إلى جملة مربعة.

إنّ الخوارزمية المعروضة في هذا البحث تقدم ثلاثة تحسينات للخوارزميات السابقة في حساب البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة مقاربة لنقطة تنتمي إلى هذه المجموعة الجبرية، التحسين الأول هو استخدام نظام جبر كمبيوتر واحد فقط "$SINGULAR$" والاستغناء عن استخدام دالة الـ "Homotopy"، والتحسين الثاني هو عدم الحاجة إلى اختزال جملة كثيرات الحدود التي تولّد المثالي إلى جملة مربعة، أما التحسين الثالث فهو تقليل عدد الخطوات وذلك من خلال البدء ببعد المجوعة $N - rank(F) \geq 0$ والانتهاء عند $d < N$ كما يوضح المثال الأخير.

المراجع العلمية: References

1. شوقي الراشد: استخدام قواعد Groebner و بُعد Krull و دالة Homotopy في حساب البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة، مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية، 2019.

2. Sh. Al Rashed, and G. Pfister: "Numerical Decomposition of Affine Algebraic Varieties", AnaleleStiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, SeriaMatematica, vol. XX, fasc. 3.2014 .
3. Sh. Al Rashed: "Numerical Algorithms in Algebraic Geometry". Verlag Suedwestdeutscherfuer Hochschulschriften ISBN - 13: 978 - 3 - 8381 - 1350 - 0. 2011 .
4. M. F, Atiyah:"Introduction to commutative Algebra". Universitry of Oxford. 1967.
5. D.J. Bates, J.D. Hauenstein, A.J. Sommese and C.W. WamplerBertini: "Software for Numerical Algebraic Geometry".http://www.nd.edu/_sommese/bertini/.
6. D.J. Bates, J.D. Hauenstein, C. Peterson and A.J. Sommese:"Numerical Local Dimension Test for Points on the Solution Set of a System of Polynomial Equations". SIAM J. Number. Anal. Vol. 47, No. 5, pp.3608 - 3623. Novemebr 13, (2009).
7. COX D,LITTLE J, and O'SHEA D,: "Using Algebraic Geometry". Springer-Verlag, second edition, New York-Berlin- Heidelberg, 572p. 1998 .
8. Chow, Mallet-Paret, and Yorke: "Total degree homotopy", (1978).
9. W. Decker, G.-M Greuel, and G. Pfister and H. Schoenemann: Singu-lar 3-1-1 | A computer algebra system

for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2010).

10. W. Decker, G.-M. Greuel, and G. Pfister: "Primary decomposition: algorithms and comparisons." In: G.-M. Greuel, B.H. Matzat, G. Hiss: Algorithmic Algebra and Number Theory. Springer Verlag, Heidelberg (1998), 187 - 220.

11. Eisenbud, D.: "Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry". Spriger-Verlay, (2008) .

12. G.-M. Greuel and G. Pfister: "A Singular Introduction to Commutative Algebra". Second edition, Springer (2007).

13. A.J. Sommese and C.W. Wampler:"The Numerical Solution of Systems of Polynomials Arising in Engineering and Science". ISBN 981 - 256 -184 - 6. Word Scienti_c Publishing Co. Plte. Ltd. (2005).

14. A.J. Sommese and C.W. Wampler: "Numerical algebraic geometry". In the mathematics of numerical analysis. (Park City, UT, 1995), Vol. 3 of lectures in Appl. Math. (pp. 749 - 763). Providence, RI: Amer. Math.Soc.