مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 40- عدد 4 (2024): 71-84

Damascus University Journal for the Basic Sciences
Vol 40 No.4 (2024): 71-84

التمثيل الثنوي لجبر لي نصف البسيط منتهي البعد

أركان الخلف*[1]، عبداللطيف هنانو[2]

1* قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – سورية

تاريخ الإيداع: 2022/8/28
تاريخ الموافقة: 2024/12/15

الملخص:

هدَفت هذه الورقة العلمية إلى دراسةِ التمثيل الثنوي لجبرِ لي نصفِ البسيط منتهي البعد على فضاءٍ متجهي منتهي البعد، ومعرفةِ فيما إذا كان التمثيلُ الثنوي ρ^* يتمتع بصفاتِ التمثيلِ الأساسي ρ، حيث أثبتنا أنّه إذا كان ρ خزولاً فإنّ ρ^* خزول، كما أثبتنا أنّه أي تمثيل ثنوي لجبر لي نصف البسيط خزول تماماً ومخلص، واستطعنا تعيين الوزن والوزن الأعلى لـ ρ^* انطلاقاً من الوزن والوزن الأعلى لـ ρ، كما قمنا بإيجاد حالاتٍ تكون فيها التمثيلات الثنوية لجبرِ لي نصف البسيط متماثلة.

الكلمات المفتاحية: جبر لي نصف البسيط، تمثيل جبر لي، التمثيل الثنوي.

التصنيف الرياضياتي العالمي (MSC 2020): 17B10 – 17B20.

Dual representation of finite dimensional Semisimple Lie algebra

Arkan Al-Khalaf *[1] Abd Al-Latef Hanano[2]

Department of mathematics – Faculty of science – Damascus University – Syria

Received :2022/8/28
Accepted:2024/12/15

Abstract:

The main purpose of this paper is to study the dual representation of finite dimensional Semisimple Lie algebra on finite dimensional space, and to know if the dual representation ρ^* has the same properties of main representation ρ, thus we proved that if ρ is reducible then ρ^* is reducible. We also proved that any dual representation of finite dimensional Semisimple Lie algebra is faithful and completely reducible, then we found the weight and the highest weigh of ρ^* with depending on the weight and the highest weight of ρ, and we found cases in which dual representations of Semisimple Lie algebra are isomorphic.

Key Words: Semisimple Lie Algebra, Representation Of Lie Algebra, Dual Representation.

Mathematical subjects classification (MSC 2020): 17B10 – 17B20.

1. جبر لي:

1.1. تعريف [2]: ليكن $\mathfrak{g}$ فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقلِ F، ومزوّداً بالتطبيق $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$، يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه جبر لي منتهي البعد على الحقلِ F إذا تحقق:

1- التطبيق $[\cdot,\cdot]$ ثنائي الخطية.

2- التطبيق $[\cdot,\cdot]$ متناظر تخالفياً أي: $[X,Y]=-[Y,X]\ \ \forall\, X,Y\in\mathfrak{g}.$

3- التطبيق $[\cdot,\cdot]$ يحقق متطابقة جاكوبي (Jacobi) أي:

$$\big[X,[Y,Z]\big]+\big[Y,[Z,X]\big]+\big[Z,[X,Y]\big]=0\ \ \forall\, X,Y,Z\in\mathfrak{g}$$

إذا كان $F=\mathbb{R}$، يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه جبر لي الحقيقي، وإذا كان $F=\mathbb{C}$، يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه جبر لي العقدي.

1.2. أمثلة [2]:

1- $\mathfrak{gl}(V)$ مجموعة الإندومورفيزمات على الفضاء $V(F)$ تشكل جبر لي وذلك بتعريف التطبيق $[\cdot,\cdot]$ بالشكل:

$$[\varphi,\mu]=\varphi\circ\mu-\mu\circ\varphi\ \ \forall\ \varphi,\mu\in\ \mathfrak{gl}(V)$$

2- $\mathfrak{gl}(n,F)$ جبر المصفوفات المربعة بمدخلات من الحقل F يشكل جبر لي وذلك بتعريف التطبيق $[\cdot,\cdot]$ بالشكل:

$$[A,B]=AB-BA\ \ \forall\ A,B\in\mathfrak{gl}(n,F)$$

ويبرهن على أنّ $\mathfrak{gl}(V)$ و $\mathfrak{gl}(n,F)$ متماثلان.

1.3. تحويل جبر لي الحقيقي إلى جبر لي عقدي (Complexification) [2]:

ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي مبني على الحقل $\mathbb{R}$، عندئذٍ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ هو جبر لي الناتج عن تحويل $\mathfrak{g}$ إلى جبر لي عقدي، ويكون معرّف بالشكل:

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{g}\oplus i\mathfrak{g}=\Big\{X+iY\,;X,Y\in\mathfrak{g}\Big\}$$

ويكون:

$$(X_1+iY_1)+(X_2+iY_2)=(X_1+X_2)+i(Y_1+Y_2)\ \ \forall\ \ X_1,Y_1,X_2,Y_2\in\mathfrak{g}$$
$$(a+ib)(X+iY)=(aX-bY)+i(aY+bX)\ \forall\, a,b\in\mathbb{R}\,,X,Y\in\mathfrak{g}$$

كما أنّ $dim\,\mathfrak{g}=dim\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

1.4. تعريف [2]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، يُقال عن العنصرين $X,Y\in\mathfrak{g}$ إنّهما متبادلان إذا كان $[X,Y]=0$، ويُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه تبديلي إذا تحقق:

$$[X,Y]=0\ \ \forall\ X,Y\in\mathfrak{g}$$

1.5. تعريف [2]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، وليكن $\mathfrak{h}$ فضاءً جزئياً من $\mathfrak{g}$، يُقال عن $\mathfrak{h}$ إنّه جبر لي جزئي من $\mathfrak{g}$ إذا كان:

$$[H_1,H_2]\in\mathfrak{h}\ \ \forall\, H_1,H_2\ \in\mathfrak{h}$$

ويُقال عن $\mathfrak{h}$ إنّه مثالي في $\mathfrak{g}$ إذا تحقق:

$$[X,H]\in\mathfrak{h}\ \ \forall\, X\in\mathfrak{g}\,,H\in\mathfrak{h}$$

ويبرهن على أنّه إذا كان $\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2$ مثاليين في $\mathfrak{g}$ فإنّ كلاً من $[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_2]$, $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2$ هو مثالي في $\mathfrak{g}$.

1.6. تعريف [2]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، يُعرّف مركز جبر لي، والذي يُرمز له $Z(\mathfrak{g})$ بأنّه المثالي:

$$Z\left(\mathfrak{g}\right) = \left\{X \in \mathfrak{g}\,;[X,Y] = 0\ \ \forall\ \ Y \in \mathfrak{g}\right\}$$

وإذا كان $\mathfrak{h}$ جبر جزئي من $\mathfrak{g}$، عندئذٍ يُعرّف مناظم $\mathfrak{h}$ في $\mathfrak{g}$ (Normalizer) بأنّه الجبر الجزئي:

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g}\,;[X,Y] \in \mathfrak{h}\ \ \forall\, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{g}$$

1.7. تعريف [1]: ليكن $\mathfrak{g},\mathfrak{h}$ جبري لي، يُقال عن التطبيق الخطي $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ إنّه تشاكل لجبر لي إذا تحقق:

$$\varphi[X,Y] = [\varphi(X),\varphi(Y)]\ \ \forall\, X,Y \in \mathfrak{g}$$

وفي الحالة التي يكون فيها φ غامر ومتباين، يُقال إنّه إيزومورفيزم، كما يُبرهن على أنّ نواة التشاكل هي مثالي في $\mathfrak{g}$.

1.8. تعريف [4]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، باستخدام الرمز $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ و$\mathfrak{g}^{(1)} = \left[\mathfrak{g}^{(0)},\mathfrak{g}^{(0)}\right]$ وحسب مفهوم الاستقراء الرياضي يكون:

$$\mathfrak{g}^{(2)} = \left[\mathfrak{g}^{(1)},\mathfrak{g}^{(1)}\right], \dots, \mathfrak{g}^{(n)} = \left[\mathfrak{g}^{(n-1)},\mathfrak{g}^{(n-1)}\right], \dots$$

إنّ كلاً من $\mathfrak{g}^{(0)},\mathfrak{g}^{(1)},\dots,\mathfrak{g}^{(n)},\dots$ هو جبر جزئي من $\mathfrak{g}$، كما أنّ $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}^{(n-1)}$، وعليه يكون $\mathfrak{g}^{(n)}$ مثالي في $\mathfrak{g}^{(n-1)}$، وتسمى السلسة المتناقصة التالية:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq\ \mathfrak{g}^{(2)} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(n-1)} \supseteq \mathfrak{g}^{(n)} \supseteq \cdots$$

بالسلسلة المشتقة في $\mathfrak{g}$.

1.9. تعريف [4]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه قابل للحل (Solvable) إذا وُجد عدد صحيح موجب m، بحيث $\mathfrak{g}^{(m)} = \{0\}$.

وإذا كان $\mathfrak{h}$ مثالي في $\mathfrak{g}$، أيضاً يُقال عن $\mathfrak{h}$ إنّه قابل للحل إذا وُجد عدد صحيح موجب m، بحيث $\mathfrak{h}^{(m)} = \{0\}$، ويُدعى المثالي الأعظمي القابل للحل في $\mathfrak{g}$ بأساس $\mathfrak{g}$، ويُرمز له $Rad(\mathfrak{g})$.

1.10. تعريف [4]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، باستخدام الرموز $\mathfrak{g}^{0} = \mathfrak{g}$ و$\mathfrak{g}^{1} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{0}]$، وحسب مفهوم الاستقراء الرياضي يكون:

$$\mathfrak{g}^{2} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{1}], \dots, \mathfrak{g}^{n} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{n-1}], \dots$$

إنّ كلاً من $\mathfrak{g}^{0},\mathfrak{g}^{1},\dots,\mathfrak{g}^{n},\dots$ هو مثالي في $\mathfrak{g}$، كما أنّ $\mathfrak{g}^{n} \subseteq \mathfrak{g}^{n-1}$، وعليه يكون $\mathfrak{g}^{n}$ مثالي في $\mathfrak{g}^{n-1}$، وتسمى السلسة المتناقصة التالية:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{0} \supseteq \mathfrak{g}^{1} \supseteq\ \mathfrak{g}^{2} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{n-1} \supseteq \mathfrak{g}^{n} \supseteq \cdots$$

بالسلسلة المركزية في $\mathfrak{g}$.

1.11. تعريف [4]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه عديم القوى (Nilpotent) إذا وُجد عدد صحيح موجب m، بحيث $\mathfrak{g}^{m} = \{0\}$. وبما أنّ $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}^{n+1}$، فإنّ كل جبر لي عديم القوى يكون قابلاً للحل.

2. جبر لي نصف البسيط:

2.1. تعريف [2]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه غير خزول (Irreducible) إذا كان يملك مثاليين وحيدين هما $\mathfrak{g}$ نفسه و$\{0\}$، كما يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه بسيط (Simple) إذا كان غير خزول، و$dim\ \mathfrak{g} \geq 2$

2.2. تعريف [6]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه نصف بسيط (Semisimple) إذا كُتب على شكل مجموع مباشر لجبور لي بسيطة. ويُبرهن على أنّ:

1- يكون $\mathfrak{g}$ نصف بسيط إذا كان $Rad(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

2- إذا كان $\mathfrak{g}$ جبر لي نصف بسيط، و$\mathfrak{h}$ مثالي في $\mathfrak{g}$، فإنّ $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ جبر لي نصف بسيط.

3- إذا كان $\mathfrak{g}$ جبر لي نصف بسيط فإنّ $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

4-إذا كان $\mathfrak{g}$ نصف بسيط، فإنّه لا يملك أي مثالي فعلي تبديلي أو قابل للحل.

2.3. جبر كارتان الجزئي [6]:

ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، وليكن $\mathfrak{h}$ جبر جزئي من $\mathfrak{g}$، يُقال عن $\mathfrak{h}$ إنّه جبر كارتان جزئي من $\mathfrak{g}$ إذا كان $\mathfrak{h}$ عديم القوى، و $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. في الحالة العامة ليس كل جبر لي يملك جبر كارتان جزئي، إلا أنّ جبر لي نصف البسيط يملك دائماً جبر كارتان جزئي. وفي الحالة التي يكون فيها جبر لي نصف بسيط يمكن تعريف جبر كارتان بأنّه الجبر الجزئي التبديلي الأعظمي من $\mathfrak{g}$.

3. تمثيل جبر لي:

3.1. تعريف[2] : ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، وليكن $V(F)$ فضاءً متجهياً منتهي البعد بُعده n، يُعرّف تمثيل جبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$ بأنّه التشاكل لجبر لي $\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ الذي يُقرن كل عنصر $X \in \mathfrak{g}$ بمؤثرٍ خطي $\rho(X)$ على الفضاء $V(F)$، والذي يحقق:

$$\rho[X, Y] = [\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X) \circ \rho(Y) - \rho(Y) \circ \rho(X)$$

وبما أنّ $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}(n, F)$ فإنّه يمكن تعريف التمثيل المصفوفي لجبر لي بالشكل: $\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, F)$، والذي هو تشاكل لجبر لي يُقرن كل عنصر $X \in \mathfrak{g}$ بمصفوفة A، حيث A هي مصفوفة $\rho(X)$ بالنسبة لقاعدة ما للفضاء $V(F)$.

3.2. تعريف [2]: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على االفضاء $V(F)$، يُعرّف التمثيل الثنوي لـ ρ بأنّه تشاكل جبر لي التالي: $\rho^*: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$ والمعرّف بالشكل:

$$\rho^*(X)(\varphi) = -(\varphi \circ \rho)(X) \quad \forall\ X \in \mathfrak{g}, \varphi \in V^*$$

أي أنّ كل تمثيل ρ لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$ يعين تمثيلاً ثنوياً ρ^* على الفضاء V^*.

3.3. تعريف [5]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، وليكن التطبيق الخطي $ad_X: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\ ; X \in \mathfrak{g}$ المعرّف بالشكل $ad_X(Y) = [X, Y]$، عندئذٍ التطبيق:

$$\begin{gathered} ad: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X \longrightarrow ad_X \end{gathered}$$

هو تشاكل لجبر لي يُسمى التمثيل المرافق لـ $\mathfrak{g}$، ويُبرهن على أنّ $Ker(ad) = Z_{\mathfrak{g}}$ كما أنّ $ad^*: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ هو التمثيل الثنوي للتمثيل المرافق، ويكون:

$$\langle ad_X^*(\varphi), Y \rangle = -\langle \varphi, ad_X(Y) \rangle \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{g}, \varphi \in \mathfrak{g}^*$$

كما أنّ:

$$\langle \rho^*(X)(\varphi), v \rangle = -\langle \varphi, \rho(X)v \rangle \quad \forall\ X \in \mathfrak{g}, \varphi \in V^*, v \in V$$

3.4. تعريف [4]: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، وليكن W فضاءً جزئياً من V ، يُقال عن W إنّه $\mathfrak{g}$ - فضاء جزئي من V إذا كان:

$$\rho(X)(W) \subseteq W \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

وفي هذه الحالة يمكن تعيين تمثيلاً ρ_W للجبر $\mathfrak{g}$ على الفضاء W يسمى تمثيلاً جزئياً من ρ، كما يمكن تعيين تمثيلاً لـ $\mathfrak{g}$ على فضاء القسمة V/W بالشكل:

$$\rho_{V/W}(X)(v + W) = \rho(X)(v) + W$$

ويقال عن ρ إنّه خزولٌ (Reducible) إذا كان يملك $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي فعلي من V، وبخلاف ذلك يُقال عن ρ إنّه غير خزول (Irreducible). كما يُقال عن ρ إنّه خزولٌ تماماً (Completely reducible) إذا تحقق:

من أجل أي $\mathfrak{g}$ – فضاء U جزئي من V يوجد $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي من V وليكن W، بحيث $V = U \oplus W$.

وبكلمةٍ ثانية يُقال عن ρ إنّه خزولٌ تماماً إذا كُتِب على شكل مجموع مباشر لتمثيلات جزئية غير خزولة، ويبرهن على أنّ:

1– إذا كان التمثيل غير خزول فإنّه خزول تماماً.

2– كل تمثيل لجبر لي نصف البسيط على فضاءٍ متجهي منتهي البعد يكون خزول تماماً.

3.5. تعريف [4]: ليكن ρ, σ تمثيلين لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاءين $V(F), W(F)$ على الترتيب، يقال عن التطبيق $\varphi: V \longrightarrow W$ إنّه تطبيق مشابكة (Intertwining) أو $\mathfrak{g}$ – تشاكل إذا تحقق:

$$\big(\varphi \circ \rho(X)\big)(v) = (\sigma(X) \circ \varphi)(v) \quad \forall\, X \in \mathfrak{g}\,, v \in V$$

وفي الحالة التي يكون فيها φإيزومورفيزم يُقال عن σ وρ إنّهما متماثلان، ويُقال عن ρ إنّه ذاتي الثنوية إذا كان ρ و ρ^* متماثلان.

3.6. الفضاء الجزئي من الفضاء الثنوي [3]:

ليكن $V(F)$ فضاءً متجهياً منتهي البعد، وW فضاءً جزئياً من V عندئذٍ W^* ليس بالضرورة فضاءً جزئياً من V^* إلا أنّه يمكن تمديده إلى فضاءٍ $\grave{W}$ جزئي منV^* ويُبرهن على أنّه إذا كان W فضاءً جزئياً من V فإنّ:

$$W^{\circ} = \{\varphi \in V^*: \varphi(v) = 0 \;\; \forall \;\; v \in W\}$$

فضاء جزئي من V^*، وأيضاً إذا كان N فضاءً جزئياً من V^* فإنّ:

$$N_{\circ} = \{v \in V: \varphi(v) = 0 \;\; \forall \;\; \varphi \in N\}$$

فضاء جزئي من V، ويُبرهن على أنّه إذا كان $V = W \oplus U$ فإنّ $V^* = W^{\circ} \oplus U^{\circ}$.

كما يُعرّف الفضاء الثنوي لـ V^* بالشكل $V^{**} = \{V^* \longrightarrow F\}$، ويُبرهن على وجود الإيزومورفيزم $\varphi: V \longrightarrow V^{**}$ المعرّف بالشكل:

$$\varphi(v): V^* \longrightarrow F\,; \;\; \varphi(v)(f) = f(v) \;\; \forall \;\; f \in V^*, v \in V$$

3.7. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$ ذي البعد n ، تمثيله الثنوي ρ^*، وليكن ρ_W تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ، عندئذٍ ρ_W^* يُمدد إلى تمثيل جزئي فعلي من ρ^*.

الإثبات: ليكن ρ_W تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ، عندئذٍ W هو $\mathfrak{g}$– فضاء جزئي فعلي من V، و لتكن $\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$ قاعدة لـ W الذي فضاؤه الثنوي $W^* = \{\varphi: W \longrightarrow F\}$، عندئذٍ ρ_W^* هو التمثيل الثنوي لـρ_W ولكنّه ليس تمثيلاً جزئياً من ρ^*، وذلك باعتبار أنّ W^* ليس فضاءً جزئياً من V^*.

لنأخذ الفضاء $\grave{W} = \{\grave{\varphi}: V \longrightarrow F\}$ المعرّف بالشكل:

$$\grave{\varphi}(w_i) = \begin{cases} \varphi(w_i)\,; & i \le m \\ 0 & ; m+1 \le i \le n \end{cases}$$

والذي يُمثل فضاءً جزئياً منV^*، ولنبرهن على أنّ $\rho^*(X)\big(\grave{W}\big) \subseteq \grave{W} \;\; \forall \;\; X \in \mathfrak{g}$

$$\forall\; \grave{\varphi} \in \grave{W}\;, X \in \mathfrak{g} \quad \rho^*(X)(\grave{\varphi})(w_i) = \rho^*(X)\big(\grave{\varphi}(w_i)\big)$$
$$= \begin{cases} \rho^*(X)(\varphi(w_i)) & ; \quad i \le m \\ \rho^*(X)(0) & ; \quad m+1 \le i \le n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\left(\varphi \circ \rho(X)\right)(w_i) & ; \ i \le m \\ 0 & ; m+1 \le i \le n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\rho_W^*(X)\left(\varphi(w_i)\right)}_{\in W^*} & ; \ i \le m \\ 0 \ ; \ m+1 \le i \le n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varphi_1(w_i) \,; i \le m \\ 0 \ ; \ m+1 \le i \le n \end{cases} \quad \in \grave{W}$$

مما سبق نجد أنّ $\grave{W}$هو $\mathfrak{g}-$ فضاء جزئي فعلي منV^*، أي أنّ $\rho_{\grave{W}}^*$ تمثيل جزئي من ρ^*.

3.8. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، عندئذٍ إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً غير فعلي من ρ، فإنّ $\rho_{W^*}^*$ تمثيل جزئي منρ^*.

الإثبات: إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً غير فعلي فإنّ W هو $\mathfrak{g}-$ فضاء جزئي غير فعلي، أي أنّه إما $W = V$ أو $W = \{0\}$، ومنه يكون $W^* = V^*$ أو $W^* = \{0\}$، وفي كلا الحالتين يكون $\rho^*(X)(W^*) \subseteq W^* \ \forall \ X \in \mathfrak{g}$، أي أنّ W^*هو $\mathfrak{g}-$ فضاء جزئي من V^* ، وبذلك يتم المطلوب.

3.9. نتيجة : ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، وρ^* تمثيله الثنوي، عندئذٍ إذا كان ρ غير خزول فإنّ ρ^* غير خزول.

الإثبات: ينتج من المبرهنتين (3.7), (3.8).

3.10. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، ρ^* تمثيله الثنوي، عندئذٍ ρ خزول إذا وفقط إذا كانρ^* خزول.

الإثبات: بفرض أنّ ρ خزول، عندئذٍ V يملك $\mathfrak{g}-$ فضاء جزئي فعلي، وليكن W، عندئذٍ W° فضاء جزئي فعلي من V^* كما أنّ:

$$\forall \ w \in W \,, f \in W^\circ \,, X \in \mathfrak{g}$$

$$\rho^*(X)(f)(w) = -\left(f \circ \rho(X)\right)(w)$$

$$= -f\left(\rho(X)(w)\right) = -f(\grave{w}) \,; \ \grave{w} \in W$$

$$= 0$$

إذن $\rho^*(X)(f) \in W^\circ$ ، وعليه ρ^* خزول.

لنفرض الآن أنّ ρ^* خزول، وليكن ρ^{**} التمثيل الثنوي لـ ρ^* على الفضاء V^{**}، عندئذٍ وفقاً للجزء الأول من المبرهنة يكون ρ^{**} خزول، ولنأخذ الإيزومورفيزم $\varphi: V \longrightarrow V^{**}$ والمعرّف بالشكل:

$$\varphi(v): V^* \longrightarrow F \,; \ \ \varphi(v)(f) = f(v) \ \ \forall \ \ f \in V^*$$

عندئذٍ: $\forall \, X \in \mathfrak{g} \,, v \in V \,, \ f \in V^*$

$$\varphi\left(\rho(X)(v)\right)(f) = f\left(\rho(X)(v)\right) = -\rho^*(X)(f)(v)$$

$$= -\varphi(v)\left(\rho^*(X)(f)\right) = \rho^{**}(X)\left(\varphi(v)\right)(f)$$

وعليه φ هو $\mathfrak{g}-$ تشاكل، وبالتالي $\mathfrak{g}-$ تماثل، أي أنّ ρ وρ^{**} متماثلان وعليه ρ خزول.

3.11. نتيجة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، عندئذٍ:

1- ρ خزول إذا وفقط إذا كان ρ^* خزول.

2- إذا كان ρ غير خزول، فإنّ ρ^* غير خزول.

الإثبات: وضوحاً كون (1) و(2) محققان في الحالةِ العامة من أجل أي جبر لي.

3.12. تعريف [4]: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، يُقال عن ρ إنّه مخلص (faithful) إذا كان التطبيق $\rho: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ متباين.

3.13. مبرهنة: كل تمثيل ثنوي لجبر لي نصف البسيط منتهي البعد على فضاءٍ متجهي منتهي البعد هو تمثيل مخلص.

الإثبات: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، تمثيله الثنوي ρ^*، عندئذٍ $\rho^*: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V^*)$ هو تشاكل لجبر لي، كما أنّ $Ker\rho^*$ مثالي في $\mathfrak{g}$، و $\mathfrak{g}/Ker\rho^*$ جبر لي نصف بسيط.

بما أنّ $\mathfrak{g}$ نصف بسيط فإنّ $\mathfrak{g} = \oplus_i \mathfrak{g}_i$، حيث $\mathfrak{g}_i$ جبر لي بسيط، عندئذٍ $\mathfrak{g}/Ker\rho^* = \oplus_i \mathfrak{g}_i/Ker\rho^*$ ، وعليه التطبيق الغامر $\widetilde{\rho^*}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/Ker\rho^*$ يكون متباين، أي أنّ $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}/Ker\rho^*$، وعليه $Ker\rho^* = \{0\}$ وبذلك يتم المطلوب.

3.14. مبرهنة: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي منتهي البعد، و ad تمثيله المرافق، عندئذٍ:

$$\ker(ad) = \ker(ad^*).$$

الإثبات: بما أنّ $\ker(ad) = Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0 \; \forall \, Y \in \mathfrak{g}\}$، عندئذٍ من أجل أي $X \in \ker(ad), Y \in \mathfrak{g}, \varphi \in \mathfrak{g}^*$ يكون:

$$\begin{aligned}\langle ad_X^*(\varphi), Y\rangle &= -\langle \varphi, ad_X(Y)\rangle \\ &= -\langle \varphi, [X,Y]\rangle = -\langle \varphi, 0\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

وعليه يكون $X \in \ker(ad^*)$، وبذلك يتم المطلوب.

3.15. نتيجة: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي منتهي البعد، و ad تمثيله المرافق، عندئذٍ إذا كان ad مخلص فإنّ ad^* مخلص.

الإثبات: ينتج مباشرةً من المبرهنة السابقة.

3.16. نتيجة: كل جبر لي نصف بسيط يعين تمثيلاً ثنوياً مرافقاً مخلصاً.

الإثبات: بما أن $\mathfrak{g}$ نصف بسيط فإنّه لا يملك أي مثالي تبديلي فعلي، وعليه يكون $Z\left(\mathfrak{g}\right) = \{0\}$، عندئذٍ $\ker(ad^*) = 0$، وبذلك يتم المطلوب.

3.17. تمهيدية (Schur) [2]: ليكن ρ, σ تمثيلين غير خزولين لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاءين $V(\mathbb{C}), W(\mathbb{C})$ على الترتيب، وليكن $\varphi: V \longrightarrow W$ $\mathfrak{g}$ - تشاكل عندئذٍ:

1- φ إمّا إيزومورفيزم أو التطبيق الصفري.

2- إذا كان $\varphi: V \longrightarrow V$، فإنّ $\varphi = \lambda I_V \, ; \, \lambda \in \mathbb{C}$.

3.18. تعريف [2]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي نصف بسيط، وليكن ρ تمثيلاً لـ $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، ولتكن $\beta: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow K$ صيغة ثنائية معرّفة على $\mathfrak{g}$ بالشكل:

$$\beta(X, Y) = tr\big(\rho(X)\rho(Y)\big)$$

ولتكن $\{X_1, \dots, X_m\}, \{Y_1, \dots, Y_m\}$ قاعدتين لـ $\mathfrak{g}$ تحققان $\beta\left(X_i, Y_j\right) = \delta_{ij}$، عندئذٍ يُعرّف عنصر (Casimir) بالشكل:

$$C_\rho\left(\beta\right) = \textstyle\sum_i \rho(X_i)\rho(Y_i) \; \in \mathfrak{gl}(V)$$

ويبرهن على أنّ C_ρ هو $\mathfrak{g}$ – تشاكل، وأنّ $tr\left(C_\rho\right) = dim\ \mathfrak{g}$.

3.19.مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$ حيث $\dim(V) = 1$، وليكن ρ^* تمثيله الثنوي، عندئذٍ. $\rho^*(X) = 0\ \ \forall\ \ X \in \mathfrak{g}$

الإثبات: بما أنّ $\dim(V) = 1$، عندئذٍ $\dim(V^*) = 1$، وبما أنّ $\mathfrak{g}$ نصف بسيط فإنّ $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$، ومن أجل $X \in \mathfrak{g}$ يكون:

$$X = \sum_i [Y_i, Z_i]\ ;\ Y_i, Z_i \in \mathfrak{g}$$

كما أنّ:

$$\rho^*(X) = \rho^*(\sum_i [Y_i, Z_i]\ ) = \sum_i \rho^*([Y_i, Z_i]) = \sum_i [\rho^*(Y_i), \rho^*(Z_i)]$$

$$= \sum_i (\rho^*(Y_i)\rho^*(Z_i) - \rho^*(Z_i)\rho^*(Y_i))$$

بفرض أنّ $V^* = \langle f \rangle$، عندئذٍ:

$$\rho^*(Z_i)(\varphi) = \lambda_{Z_i} f\ \ ;\ \varphi \in V^*, \lambda_{Z_i} \in F$$

وعليه يكون:

$\rho^*(Y_i)\rho^*(Z_i)(\varphi) = \lambda_{Y_i}\, \lambda_{Z_i} f = \lambda_{Z_i}\, \lambda_{Y_i} f = \rho^*(Z_i)\rho^*(Y_i)(f)$ أي أنّ $\rho^*(X) = 0$.

3.20. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$ ذي البعد n، وρ^* تمثيله الثنوي عندئذٍ إذا كان W^* هو $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي من V^* وغير خزول بُعده $n-1$، فإنّ التمثيل الثنوي ρ^* خزول تماماً.

الإثبات: إنّ التمثيل ρ^* هو تمثيل مخلص، وبما أنّ V^*/W^* فضاء متجهي بُعده 1 و$\mathfrak{g}$ يملك تمثيلاً $\grave{\rho}^*$ على هذا الفضاء، فإنّه وفقاً للمبرهنة (3.19) يكون:

$$\grave{\rho}^*(X)(\mu + W^*) = \rho^*(X)(\mu) + W^* = W^*$$

وعليه يكون $\rho^*(X)(\mu) \in W^*\ \ \forall\ \mu \in V^*, X \in \mathfrak{g}$، وأيضاً $C_{\rho^*}(\mu) \in W^*\ \ \forall\ \mu \in V^*$، وبما أنّ C_{ρ^*} هو $\mathfrak{g}$ – تشاكل وW^* غير خزول فإنّه وفقاً لتمهيدية (Schur) يكون مقصور C_{ρ^*} على W^* هو $\mathfrak{g}$ – تماثل، و$C_{\rho^*} = \lambda I_{W^*}$، وعليه:

$$tr(C_{\rho^*}) = \lambda tr(I_{W^*}) = \lambda(n-1) = dim\mathfrak{g}$$

أي أنّ $\lambda \neq 0$، وبالتالي $RankC_{\rho^*} = n - 1 = dimW^*$.

لدينا $dimV^* = dim\ KerC_{\rho^*} + dim\ RankC_{\rho^*}$، وعليه يكون $dim\ KerC_{\rho^*} = 1$، لكنّ $KerC_{\rho^*}$ هي $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي من V^*، كما أنّ $KerC_{\rho^*} \cap W^* = \{0\}$، وبالتالي $V^* = KerC_{\rho^*} \oplus W^*$، وبذلك يتم المطلوب.

3.21. مبرهنة: كل تمثيل ثنوي لجبر لي نصف البسيط على فضاءٍ متجهي منتهي البعد هو تمثيل خزول تماماً.

الإثبات: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(F)$، وρ^* تمثيله الثنوي، وليكن W هو $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي من V، عندئذٍ كما وجدنا سابقاً يكون W° هو $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي من V^*، لكنّ ρ خزول تماماً بالتالي يوجد $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي من V وليكن U، بحيث $V = W \oplus U$ وعليه يكون U° هو $\mathfrak{g}$ – فضاء جزئي من V^*، و $V^* = W^\circ \oplus U^\circ$، وبذلك يتم المطلوب.

4. وزن التمثيل:

4.1. تعريف [2]: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(\mathbb{C})$، وليكن $\mathfrak{h}$ جبر كارتان الجزئي من $\mathfrak{g}$، يُقال عن $\mu: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ إنّه وزن لـ ρ إذا وُجدَ $v \in V$ بحيث يكون:

$$\rho(H)v = \mu(H)v\ \ \ \forall\ H \in\ \mathfrak{h}$$

وفي هذه الحالة يُقال عن v إنّه متجه وزن، كما أنّ مجموعة المتجهات والمحققة للتعريف السابق تشكل فضاء متجهي يسمى فضاء الوزن، كما أنّ مجموعة الأوزان المقابلة للتمثيل ρ تشكل قاعدة للفضاء $V(\mathbb{C})$.

ويُقال عن $\alpha: \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ إنّه جذر إذا وُجِدَ $X \in \mathfrak{g}$، بحيث يكون:

$$[H, X] = \alpha(H)X \quad \forall\ H \in \mathfrak{h}$$

ويُرمز لمجموعة الجذور بالرمز $\mathfrak{R}$. تسمى مجموعة الجذور $\Delta \subset \mathfrak{R}$ بالجذور البسيطة، والتي تحقق:

$$\forall\ \beta \in \mathfrak{R} \quad \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k\alpha$$

بحيث تكون المعاملات k هي أعداد إمّا جميعها موجبة أو جميعها سالبة، ويُبرهن على أنّ Δ تشكل قاعدة لـ $\mathfrak{R}$.

وتُعرّف الجذور الموجبة بالشكل:

$$\mathfrak{R}^{+} = \left\{\beta \in \mathfrak{R} :\ \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k\alpha \quad ; \ k \in Z_{\geq 0}\right\}$$

كما تُعرّف الجذور السالبة بالشكل:

$$\mathfrak{R}^{-} = \left\{\beta \in \mathfrak{R} :\ \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k\alpha \quad ; \ k \in Z_{\leq 0}\right\}$$

ويكون $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{+} \cup \mathfrak{R}^{-}$.

4.2. تعريف [1]: ليكن μ_1, μ_2 وزنين للتمثيل ρ، عندئذٍ يُقال إنّ الوزن μ_1 أعلى من μ_2 أو μ_2 أدنى من μ_1 ويُكتب $\mu_1 \geq \mu_2$ إذا تحقق:

$$\mu_1 - \mu_2 = \sum_{\alpha \in \Delta} k\alpha \quad ; \ k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ويُقال إنّ μ وزن أعلى للتمثيل ρ إذا كان $\mu \geq \mu_i$ وذلك من أجل أي وزن μ_i للتمثيل ρ، كما يُقال عن μ إنّه وزن أدنى لـ ρ إذا كان $\mu \leq \mu_i$. إنّ العلاقة $(\geq)$ بين مجموعة أوزان التمثيل ρ هي علاقة ترتيب جزئي أي أنّه ليس بالضرورة أن يملك التمثيل وزن أعلى.

4.3. مبرهنة الوزن الأعلى [1]: ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي نصف بسيط، عندئذٍ:

1− كل تمثيل غير خزول لـ $\mathfrak{g}$ يملكُ وزناً أعلى.

2− ليكن ρ, σ تمثيلين غير خزولين لـ $\mathfrak{g}$، عندئذٍ σ وρ متماثلان إذا وفقط إذا كانا يملكان الوزن الأعلى نفسه.

4.4. تعريف [1]: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي $\mathfrak{g}$، و$\mathfrak{R}$ مجموعة الجذور الموافقة لـ $\mathfrak{g}$، عندئذٍ تُعرّف زمرة (Weyl) والتي يُرمز لها W بالشكل $W = \langle s_\alpha\ ;\ \alpha \in \mathfrak{R}\rangle$، حيث s_α هو الانعكاس بالنسبة للمستقيم المعامد لـ α، ويبرهن على أنّ $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ ، وإذا كان $\alpha \neq \beta \in \mathfrak{R}^{+}$ فإنّ $s_\alpha(\beta) \in \mathfrak{R}^{+}$.

كل عنصر $w \in W$ يُكتب على شكل جداء لانعكاسات s_α، وإذا كان $w = s_{\alpha_1}.s_{\alpha_2} \dots . s_{\alpha_k}\ ;\ k \geq 0$، حيث k أصغر عدد ممكن من الانعكاسات يكفي للتعبير عن w، عندئذٍ تسمى هذه الصيغة بالصيغة الأصغرية لـ w، كما أنّ العنصر الأطول في W يرمز له w_0 ويقوم بتحويل الجذور الموجبة إلى جذور سالبة.

4.5. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$على الفضاء $V(\mathbb{C})$، عندئذٍ إذا كان μ وزن لـ ρ فإنّ $-\mu$ وزن لـ ρ^*.

الإثبات: ليكن $\mathfrak{h}$ جبر كارتان الجزئي من $\mathfrak{g}$، ولتكن $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ قاعدة للفضاء V مكوّنة من متجهات الوزن التي تقابل الأوزان $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$، وثنويتها $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ قاعدة للفضاء V^*، وعليه $\varphi_j(v_i) = \delta_{j,i}$، إذا كان $H \in \mathfrak{h}$، عندئذٍ يكون:

$$\begin{aligned}\langle \rho^*(H)\varphi_j, v_i \rangle &= -\langle \varphi_j, \rho(H)v_i \rangle \\ &= -\langle \varphi_j, \mu_i(H)v_i \rangle = -\mu_i(H)\delta_{j,i} \\ &= -\mu_j(H)\langle \varphi_j, v_i \rangle = \langle -\mu_j(H)\varphi_j, v_i \rangle\end{aligned}$$

أي أنّ:

$$\rho^*(H)\varphi_j = -\mu_j(H)\varphi_j$$

وعليه تكون $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ هي متجهات وزن تقابل الأوزان $\{-\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_n\}$.

4.6. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(\mathbb{C})$، عندئذٍ إذا كان μ وزن أعلى لـ ρ فإنّ $\mu-$ وزن أدنى لـ ρ^*.

الإثبات: بفرض أنّ μ وزن أعلى لـ ρ، عندئذٍ $\mu \geq \mu_i$ وذلك من أجل أي وزن μ_i لـ ρ لكنّ $-\mu_i \geq -\mu$، وذلك لكون $(\geq)$ علاقة ترتيب جزئي على مجموعة أوزان التمثيل ρ، وأنّ المعكوس ينقل القيمة الأعظمية لهذه المجموعة إلى قيمة أصغرية، وعلاوة على ذلك $-\mu, -\mu_i$ هي أوزان لـρ^*، وعليه $\mu-$ هو وزن أدنى لـ ρ^*.

4.7. نتيجة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(\mathbb{C})$، عندئذٍ إذا كان μ وزن أدنى لـ ρ فإنّ $\mu-$ وزن أعلى لـρ^*.

الإثبات: ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة.

4.8. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاء $V(\mathbb{C})$، وليكن μ وزن أعلى لـ ρ، عندئذٍ $w_0\mu-$وزن أعلى لـρ^*، حيث w_0 هو العنصر الأطول في زمرة (weyl).

الإثبات: إذا كان μ وزناً أعلى لـ ρ، عندئذٍ:

$$\mu - \mu_i = k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n$$

وذلك من أجل أي وزن μ_i لـ ρ، وبتطبيق w_0 على الطرفين نجد:

$$w_0\mu - w_0\mu_i = w_0(k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n)$$

عندئذٍ:

$$w_0\mu_i - w_0\mu = -w_0(k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n)$$

وبما أنّ:

$$w_0(k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n) \in \mathfrak{R}^-$$

فإنّ:

$$-w_0(k_1\alpha_1 + \dots + k_n\alpha_n) \in \mathfrak{R}^+$$

وعليه يكون $w_0\mu$ وزن أدنى لـ ρ، بالتالي $w_0\mu-$ وزن أعلى لـ ρ^*.

4.9. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً غير خزول لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ وزنه الأعلى μ، عندئذٍ إذا كان $w_0 = -Id$ فإنّ ρ ذاتي الثنوية.

الإثبات: بما أنّ ρ تمثيل غير خزول وزنه الأعلى μ، فإنّه وفقاً للمبرهنتين (3.9)(4.8) يكون ρ^* غير خزول وزنه الأعلى $-w_0\mu$ لكنّ $w_0 = -Id$، عندئذٍ:

$$-w_0\mu = -(-Id)\mu = Id\mu = \mu$$

أي أنّ ρ^*و ρ يملكان الوزن الأعلى نفسه، وحسب مبرهنة الوزن الأعلى يكون ρ^*و ρ متماثلان وبذلك يتم المطلوب.

4.10. مبرهنة: ليكن ρ, σ تمثيلين غير خزولين لجبر لي نصف البسيط $\mathfrak{g}$ على الفضاءين $V(\mathbb{C}), W(\mathbb{C})$ على الترتيب ويملكان الوزن الأعلى نفسه، عندئذٍ ρ^*, σ^* متماثلان.

الإثبات: بما أنّ ρ, σ غير خزولين ويملكان الوزن الأعلى نفسه، فهما متماثلان أي يوجد $\mathfrak{g}-$ تشاكل $\varphi: V \longrightarrow W$، بحيث يكون φ إيزومورفيزم ويحقق $\varphi \circ \rho = \sigma \circ \varphi$.

ولكي يتم المطلوب يكفي أن نبرهن على أنّ $\varphi^*: W^* \longrightarrow V^*$ إيزومورفيزم يحقق $\rho^* \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \sigma^*$.

بما أنّ $\varphi: V \longrightarrow W$ تطبيق خطي فإنّه يوجد تطبيق خطي وحيد:

$$\begin{aligned} \varphi^*: W^* &\longrightarrow V^* \\ f &\longrightarrow f \circ \varphi \end{aligned}$$

وبفرض أنّ $\varphi^*(f_1)(v) = \varphi^*(f_2)(v)\ \forall f_1, f_2 \in W^*, v \in V$، عندئذٍ:

$$\begin{gathered} (f_1 \circ \varphi)(v) = (f_2 \circ \varphi)(v) \\ f_1\big(\varphi(v)\big) = f_2(\varphi(v)) \\ f_1(w) = f_2(w) \end{gathered}$$

وذلك من أجل أي $w \in W$، إذن $f_1 = f_2$ و φ^* متباين.

ليكن $f \in V^*$، بما أنّ φ إيزومورفيزم فإنّ $f \circ \varphi^{-1} \in W^*$ كما أنّ:

$$\begin{aligned} \varphi^*\left(f \circ \varphi^{-1}\right) &= \left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \varphi \\ &= f \circ \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right) = f \circ Id = f \end{aligned}$$

أي أنّ φ^* غامر، وعليه يكون φ^* إيزومورفيزم.

ليكن $f \in W^*$، عندئذٍ:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \rho)^*(f) &= f \circ (\varphi \circ \rho) = (f \circ \varphi) \circ \rho \\ &= \rho^*(f \circ \varphi) = \rho^*(\varphi^*(f)) \\ &= (\rho^* \circ \varphi^*)(f) \end{aligned}$$

وبالطريقة ذاتها يكون $(\sigma \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \sigma^*$، وبما أنّ $\varphi \circ \rho = \sigma \circ \varphi$ فإنّ $\rho^* \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \sigma^*$، وبذلك يتم المطلوب.

التمويل : هذا البحث ممول من جامعة دمشق وفق رقم التمويل (501100020595).

References:

1. Bourbaki, Nicolas. (1989). Lie Groups and Lie Algebras . Springer. P: 440. Hall, Brian. (2015). Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. 2nd ed. Springer. P: 426.
2. Halms, Paul. (1995). LINEAR ALGEBRA PROBLEM BOOK. United States of America. The Mathematical Association of America. P: 349.
3. Humphreys, James. (1980).Introduction to Lie Algebra and Representation Theory.3rd ed. Springer. P: 186.
4. Marsden, Jerrold, and Ratiu, Tudor. (1998). Introduction to Mechanics and Symmetry. 2nd ed. P: 549.
5. Serre, Jean-Pierre. (1987). Complex Semisimple Lie Algebras. Springer. P: 82.