مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 40- عدد 2 (2024): 13-23

Damascus University Journal for the Basic Sciences
Vol 40 No.1 (2024): 13 -23

المودولات الثنائية شبه المنتظمة

معن رياض خليف[1] د. حمزة ابراهيم حاكمي[2]

* طالب دكتوراه– قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق.
maen2.khlief@damascusuniversity.edu.sy
** أستاذ، قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق.
hamza.ibrahim@damascusuniversity.edu.sy

الملخص

في هذه الورقة العلمية درسنا المودول الثنائي من النوع $[M,N]$, حيث M,N مودولين يمينيين (يساريين) فوق حلقة ما R, كتعميم لحلقة الإندومورفيزمات لمودول, حيث درسنا مفهوم شبه الانتظام للمودول $[M,N]$ وعلاقته بالمودولات $M-$الإسقاطية المباشرة و $N-$الأفقية المباشرة. حيث أوردنا عدداً من الشروط اللازمة والكافية كي يكون المودول $[M,N]$ شبه منتظم.

فضلاً عن ذلك, أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المودول $[M,N]$ شبه منتظم هو أن يكون N مودولاً $M-$إسقاطياً مباشراً ولأجل كل عنصر مغاير للصفر $f\in[M,N]$ فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول N. كذلك أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المودول $[M,N]$ شبه منتظم هو أن يكون M مودولاً $N-$أفقياً مباشراً ولأجل كل عنصر مغاير للصفر $f\in[M,N]$ فإن $Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K\neq M$ للمودول M.

أخيراً, أثبتنا أن المودول $[M,N]$ يكون D_2-مودول عندما وفقط عندما المودول N يكون $M-$ إسقاطياً مباشراً. كما أثبتنا أن المودول $[M,N]$ يكون C_2-مودول عندما وفقط عندما المودول M يكون $N-$أفقياً مباشراً.

الكلمات المفتاحية: المودول الثنائي, المودول الثنائي المنتظم, المودول الثنائي شبه المنتظم, المودول الإسقاطي (الأفقي) المباشر, C_2-مودول, D_2-مودول.

التصنيف الرياضياتي العالمي للعام 2020. 16E50,16N20,16D40,16D90.

تاريخ الإيداع: 2022/07/26
تاريخ الموافقة: 2022/10/25

ISSN (online): 2789-6366
http://journal.damascusuniversity.edu.sy/index.php/index/index

Semi-Regular Bi-Modules

Maen Ryad Khlief [1]   **Dr. Hamza Ibrahim Hakmi**[2]

[*]PhD student; Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.
maen2.khlief@damascusuniversity.edu.sy

[**]Professor; Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.
hamza.ibrahim@damascusuniversity.edu.sy

Abstract

In this paper, we study the bi-module of the form $[M,N]$, where M,N are right (left) modules over a some ring R, as a generalization of endomorphism of module. Where we study a semi-regular concept of the bi-module $[M,N]$ and its relation with direct $M-$projective and direct $N-$injective modules.

Where we proved that a many of necessary and sufficient conditions to be the module $[M,N]$ semi-regular.

Furthermore, we proved that the bi-module $[M,N]$ is semi-regular if and only if N is direct $M-$projective module and for every nonzero element $f \in [M,N]$, $Im(f)$ contains a nonzero direct summand of N.

Also, we proved that the bi-module $[M,N]$ is semi-regular if and only if M is direct $N-$injective module and for every nonzero element $f \in [M,N]$, $Ker(f)$ contained in a direct summand $K \neq M$ of M.

Finally, we proved that the bi-module $[M,N]$ is D_2-module if and only if N is direct $M-$projective module. Also, we proved that the bi-module $[M,N]$ is C_2-module if and only if M is direct $N-$injective module.

Key words: Bi-modules, Regular bi-module, Semi-regular bi-module, Direct projective (injective) module, C_2-module, D_2-module.

(2020) Mathematics Subject Classification: 16E50,16N20,16D40,16D90

2022/07/26: Received
2022/10/25 Accepted:

المقدمة:

في العقود الأربعة الأخيرة بدأت دراسة المودولات الثنائية من النوع $[M,N]$ حيث M,N مودولين يمينيين (يساريين) فوق حلقة ما R, وكان لهذه الدراسة دوراً كبيراً في تطور نظرية الحلقات والمودولات, وذلك لأسباب عدة نذكر منها على سبيل المثال أن $[M,N]$ هو مودول وهذا المودول يعد تعميماً لحلقة الإندومورفيزمات لمودول وذلك عندما $M=N$.

يعد $\mathrm{F.\,Kasch}$ من الرواد الذين درسوا هذا المودول وذلك عام 2004 في [4], حيث درس مفهوم الانتظام لهذا المودول. بعد ذلك وفي عام 2009 تابع $\mathrm{Y.\,Zhou}$ في [7], دراسة المودول $[M,N]$, حيث درس عدداً من البنى الجزئية لهذا المودول وعلاقة هذا المودول بالمودولات الإسقاطية المحلية والأفقية المحلية.

في هذه الورقة العلمية تابعنا دراسة المودول $[M,N]$, حيث درسنا مفهوم شبه الانتظام للمودول $[M,N]$ وعلاقته بالمودولات $M-$الإسقاطية المباشرة و $N-$الأفقية المباشرة. حيث أوردنا عدداً من الشروط اللازمة والكافية كي يكون المودول $[M,N]$ شبه منتظم.

فضلاً عن ذلك, أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المودول $[M,N]$ شبه منتظم هو أن يكون N مودولاً $M-$إسقاطياً مباشراً ولأجل كل عنصر مغاير للصفر $f\in[M,N]$ فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول N. كذلك أثبتنا أن الشرط اللازم والكافي كي يكون المودول $[M,N]$ شبه منتظم هو أن يكون M مودولاً $N-$أفقياً مباشراً ولأجل كل عنصر مغاير للصفر $f\in[M,N]$ فإن $Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K\neq M$ للمودول M.

أخيراً, أثبتنا أن المودول $[M,N]$ يكون D_2-مودول عندما وفقط عندما المودول N يكون $M-$ إسقاطياً مباشراً. كما أثبتنا أن المودول $[M,N]$ يكون C_2-مودول عندما وفقط عندما المودول M يكون $N-$أفقياً مباشراً.

جميع الحلقات التي ستتم دراستها هي حلقات واحدية والمودولات فوق هذه الحلقات هي مودولات يمينية مالم يتم ذكر خلاف ذلك وبشكل صريح.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R ولتكن $E_M=Hom(M,M)$. نقول عن العنصر $\alpha\in E_M$ إنه منتظم إذا وجد عنصر $\beta\in E_M$ يحقق $\alpha=\alpha\beta\alpha$.

تمهيدية [5].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. الشرط اللازم والكافي كي يكون العنصر $\alpha\in E_M$ منتظماً هو أن يكون كل من $Im(\alpha)$ و $Ker(\alpha)$ حداً مباشر في M.

1 – المودولات الثنائية شبه المنتظمة.

ليكن M_R,N_R مودولين فوق حلقة R. لنفرض أن $E_M=End_R(M)$ و $E_N=End_R(N)$, لنفرض أيضاً أن $[M,N]=Hom_R(M,N)$.

إن المجموعة $[M,N]$ تشكل زمرة جمعية تبديلية وهذه الزمرة تشكل مودولاً يسارياً فوق الحلقة E_N وتشكل أيضاً مودولاً يمينياً فوق الحلقة E_M, لذلك فإن الزمرة $[M,N]$ هي $(E_N,E_M)-$ مودول ثنائي. لنأخذ في المودول $[M,N]$ المجموعات الآتية:

$$D[M,N]=\{\alpha\in[M,N];\ Im(1_N-\alpha\beta)\subseteq^{\oplus} N\ \text{ for some }\ 0\neq\beta\in[N,M]\}$$

$$\overline{D}[M,N]=\{\alpha\in[M,N];\ Im(1_M-\beta\alpha)\subseteq^{\oplus} M\ \text{ for some }\ 0\neq\beta\in[N,M]\}$$

$$K[M,N]=\{\alpha\in[M,N];\ Ker(1_N-\alpha\beta)\subseteq^{\oplus} N\ \text{ for some }\ 0\neq\beta\in[N,M]\}$$

$$\overline{K}[M,N]=\{\alpha\in[M,N];\ Ker(1_M-\beta\alpha)\subseteq^{\oplus} M\ \text{ for some }\ 0\neq\beta\in[N,M]\}$$

$$D^{\bullet}[M,N]=\{\alpha\in[M,N];\ Im(1_N-\alpha\beta)\subseteq T\subseteq^{\oplus} N\ \text{ for some }\ 0\neq\beta\in[N,M]\}$$

$$K^{\bullet}[M,N]=\{\alpha\in[M,N];\ Ker(1_N-\alpha\beta)\supseteq T\subseteq^{\oplus} N\ \text{ for some }\ 0\neq\beta\in[N,M]\}$$

من الواضح أن المجموعات السابقة هي مجموعات جزئية غير خالية في المودول $[M,N]$, فضلاً عن ذلك إن المجموعات السابقة ترتبط مع بعضها البعض بعدد من العلاقات سنذكر بعضاً منها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيدية 1−1.

ليكن M_R, N_R مودولين فوق حلقة R وأن $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$, عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 - $D[M,N] = \overline{D}[M,N]$ و $K[M,N] = \overline{K}[M,N]$.

2 - $D[M,N] = D^{\bullet}[M,N]$ و $K[M,N] = K^{\bullet}[M,N]$.

3 - $D[M,N] = \overline{D}[M,N] = D^{\bullet}[M,N]$ و $K[M,N] = \overline{K}[M,N] = K^{\bullet}[M,N]$.

البرهان.

1 − لنبرهن على أن $D[M,N] = \overline{D}[M,N]$. ليكن $f \in D[M,N]$, عندئذ يوجد $g \in [N,M]$ بحيث إن $Im(1_N - fg)$ حد مباشر في N ومنه يوجد عنصر جامد $e \in E_N$ بحيث إن: $Im(1_N - fg) = Ker(e)$

وهذا يبين أن $e(1_N - fg) = 0$ ومنه يكون $e = efg$ وأن $e = efge$, فضلاً عن ذلك إن: $ge = (ge)f(ge)$

لنضع $h = ge$ فنجد أن $h \in [N,M]$ ويحقق أن $h = hfh$ ومنه فإن $hf \in E_M$ هو عنصر جامد وبالتالي يكون $1_M - hf \in E_M$ هو أيضاً عنصر جامد وبالتالي فإن $Im(1_M - hf)$ حد مباشر في M وهذا يبين أن $f \in \overline{D}[M,N]$ وبالتالي يكون $D[M,N] \subseteq \overline{D}[M,N]$. بالمثل يمكننا إثبات صحة الاحتواء $\overline{D}[M,N] \subseteq D[M,N]$ وهكذا نجد أن $D[M,N] = \overline{D}[M,N]$.

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة المساواة $K[M,N] = \overline{K}[M,N]$.

2 − من الواضح أن $D[M,N] \subseteq D^{\bullet}[M,N]$.

ليكن $f \in D^{\bullet}[M,N]$, عندئذ يوجد $g \in [N,M]$ بحيث إن $Im(1_N - fg)$ محتوى في حد مباشر T للمودول N .

لنفرض أن $e: N \to T$ التشاكل الإسقاطي الغامر, عندئذ يكون: $Im(1_N - fg) \subseteq T = Im(e)$

وهذا يبين أن $e(1_N - fg) = 1_N - fg$ وبالتالي يكون $fg - efg = 1_N - e$ وأن:

$$(1_N - e)fg = 1_N - e$$

كما أن $(1_N - e)fg(1_N - e) = 1_N - e$ ومنه إن $g(1_N - e)fg(1_N - e) = g(1_N - e)$.

لنضع $h = g(1_N - e)$ فنجد أن $h \in [N,M]$ ويحقق أن $h = hfh$ ومنه فإن $fh \in E_N$ هو عنصر جامد وبالتالي يكون $1_N - fh \in E_N$ هو أيضاً عنصر جامد وبالتالي فإن $Im(1_N - fh)$ حد مباشر في N وهذا يبين أن $f \in D[M,N]$ وبالتالي يكون $D^{\bullet}[M,N] \subseteq D[M,N]$. مما سبق أن:

$$D[M,N] = D^{\bullet}[M,N]$$

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة المساواة $K[M,N] = K^{\bullet}[M,N]$.

3 − ينتج مباشرة من (1) و(2).

تعريف.

ليكن M_R, N_R مودولين فوق حلقة R . نقول عن العنصر المغاير للصفر $f \in [M,N]$ إنه شبه منتظم إذا وجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N,M]$ يحقق $g = gfg$, [1].

ونقول عن المودول $[M,N]$ إنه شبه منتظم إذا كان كل عنصر مغاير للصفر من $f \in [M,N]$ شبه منتظم, [3].

مبرهنة 1−2.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R وأن $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$, عندئذ لأجل أي عنصر مغاير للصفر $f \in [M, N]$ الشروط الآتية متكافئة:

1 – العنصر f شبه منتظم.

2 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N, M]$ بحيث إن $Im(1_N - fg)$ حد مباشر في N.

3 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in [N, M]$ بحيث إن $Im(1_M - hf)$ حد مباشر في M.

4 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N, M]$ بحيث إن $Im(1_N - fg)$ محتوى في حد مباشر $T \neq N$ للمودول N.

5 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in [N, M]$ بحيث إن $Im(1_M - hf)$ محتوى في حد مباشر $K \neq N$ للمودول M.

البرهان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن العنصر f شبه منتظم, عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N, M]$ بحيث إن $g = gfg$ ومنه فإن $fg \in E_N$ عنصر جامد وبالتالي فإن $1_N - fg \in E_N$ هو أيضاً عنصر جامد ومنه فإن $Im(1_N - fg)$ حد مباشر في N.

$(2) \Leftarrow (4)$. واضح.

$(4) \Leftarrow (1)$. حسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N, M]$ بحيث $Im(1_N - fg)$ محتوى في حد مباشر $T \neq N$ للمودول N. لنفرض أن $e: N \to T$ التشاكل الإسقاطي الغامر, فنجد أن $e \in E_N$ عنصر جامد وأن $e \neq 1_N$, عندئذ يكون $Im(1_N - fg) \subseteq T = Im(e)$ ومنه نجد أن:

$e(1_N - fg) = 1_N - fg$ وبالتالي يكون $fg - efg = 1_N - e$ ومنه فإن $(1_N - e)fg = 1_N - e$ وأن:

$$(1_N - e)fg(1_N - e) = 1_N - e$$

كما أن $g(1_N - e)fg(1_N - e) = g(1_N - e)$. لنضع $h = g(1_N - e)$ فنجد أن $h \in [N, M]$ ويحقق أن $h = hfh$.

فضلاً عن ذلك, إن $h \neq 0$, لأنه إذا كان $h = 0$ نجد أن: $1_N - e = (1_N - e)fg(1_N - e) = (1_N - e)fh = 0$

وبالتالي يكون $e = 1_N$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر f شبه منتظم. بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (5)$.

اعتماداً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R و $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$, عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – المودول $[M, N]$ شبه منتظم.

2 – $[M, N] = D[M, N] = \overline{D}[M, N] = D^{\bullet}[M, N]$.

مبرهنة 1-3.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R وأن $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$, عندئذ لأجل أي عنصر مغاير للصفر $f \in [M, N]$ الشروط الآتية متكافئة:

1 – العنصر f شبه منتظم.

2 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N, M]$ بحيث إن $Ker(1_N - fg)$ حد مباشر في N.

3 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in [N, M]$ بحيث إن $Ker(1_M - hf)$ حد مباشر في M.

4 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N, M]$ بحيث إن $Ker(1_N - fg)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول N.

5 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in [N, M]$ بحيث إن $Ker(1_M - hf)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M.

البرهان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن العنصر f شبه منتظم, عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g\in[N,M]$ بحيث إن $g=gfg$ ومنه فإن $fg\in E_N$ عنصر جامد وبالتالي فإن $1_N-fg\in E_N$ هو أيضاً عنصر جامد ومنه فإن $Ker(1_N-fg)$ حد مباشر في N.

$(2)\Leftarrow(4)$. واضح.

$(4)\Leftarrow(1)$. حسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $g\in[N,M]$ بحيث $Ker(1_N-fg)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر T للمودول N. لنفرض أن $e:N\to T$ التشاكل الإسقاطي الغامر, فنجد أن $e\in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي يكون $Im(e)=T\subseteq Ker(1_N-fg)$ ومنه نجد أن $(1_N-fg)e=0$ وبالتالي فإن $e=fge$ وأن $e=efge$ كما أن $ge=(ge)f(ge)$.

لنضع $h=ge$ فنجد أن $h\in[N,M]$ ويحقق أن $h=hfh$. فضلاً عن ذلك, إن $h\neq 0$, لأنه إذا كان $h=0$ نجد أن $e=fge=fh=0$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر f شبه منتظم. بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1)\Leftrightarrow(3)\Leftrightarrow(5)$.

اعتماداً على المبرهنة الأخيرة يمكننا صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R و $E_M=End_R(M)$ و $E_N=End_R(N)$, عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – المودول $[M,N]$ شبه منتظم.

2 – $[M,N]=K[M,N]=\overline{K}[M,N]=K^{\bullet}[M,N]$.

2– المودولات $M-$ الإسقاطية المباشرة.

تعريف [6].

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R. نقول عن المودول N إنه $M-$إسقاطي مباشر إذا كان لأجل أي حد مباشر K للمودول N ولأجل أي تشاكل غامر $\alpha:M\to K$ يوجد تشاكل مودولات $\beta:N\to M$ بحيث $\alpha\beta=\pi$ حيث $\pi:N\to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر.

ونقول عن المودول M إنه إسقاطي مباشر إذا كان M هو $M-$إسقاطي مباشر, [2].

مبرهنة 2–1.

ليكن M,N مودولين فوق حلقة R و $E_M=End_R(M)$ و $E_N=End_R(N)$, عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – المودول $[M,N]$ شبه منتظم.

2 – المودول N هو $M-$إسقاطي مباشر ولأجل كل عنصر مغاير للصفر $f\in[M,N]$ فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول N.

البرهان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول $[M,N]$ شبه منتظم وليكن $f\in[M,N]$ عنصر مغاير للصفر, بحسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $g\in[N,M]$ بحيث إن $g=gfg$ ومنه فإن $fg\in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن $Im(fg)\subseteq N$ حد مباشر مغاير للصفر للمودول N وأن $Im(fg)\subseteq Im(f)$.

ليكن K حداً مباشراً للمودول N وأن $\alpha : M \to K$ تشاكل مودولات غامر ولنفرض أن $\pi : N \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر. لما كان المودول $[M,N]$ شبه منتظم فإنه يوجد عنصر $h \in [N,M]$ بحيث إن $h \neq 0$ ويحقق $h = h\alpha h$ ومنه فإن $e = \alpha h \in E_N$ عنصر جامد مغاير للصفر وأن:

$$Im(e) = Im(\alpha h) \subseteq Im(\alpha) = K$$

ولما كان $m = e(m) + (1-e)(m)$ أياً كان $m \in M$ نجد أن $e(m) = \pi(m)$ ومنه فإن $e = \pi$ وهكذا نجد أن $\alpha h = \pi$ وهذا يبين أن المودول المودول N إنه $M-$إسقاطي مباشر.

$(2) \Leftarrow (1)$. ليكن $f \in [M,N]$ عنصراً مغايراً للصفر, بحسب الفرض فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر K للمودول N. لنفرض أن $\pi : N \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر, عندئذ فإن: $Im(\pi) = K \subseteq Im(f)$

ومنه فإن: $Im(\pi) \subseteq Im(\pi f) \subseteq Im(\pi)$

وهذا يبين أن $Im(\pi) = Im(\pi f)$ وبالتالي فإن $\pi f : M \to K$ تشاكل مودولات غامر, ولما كان المودول N هو $M-$إسقاطي مباشر فإنه يوجد تشاكل مودولات $\beta \in [N,M]$ بحيث إن $(\pi f)\beta = \pi$ وبالتالي يكون $\beta(\pi f)\beta = \beta\pi$ كما أن $(\beta\pi) f (\beta\pi) = \beta\pi$.

لنضع $h = \beta\pi$ فنجد أن $h \in [N,M]$ ويحقق أن $hfh = h$ وأن $h \neq 0$, لأنه إذا كان $h = 0$ نجد أن: $\pi = (\beta\pi) f\beta = hf\beta = 0$

وهذا غير ممكن, ومنه فإن المودول $[M,N]$ شبه منتظم.

تعريف.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. نقول عن المودول $[M,N]$ إنه D_2-مودول إذا كان لأجل أي حد مباشر A للمودول N ولأجل أي مودول جزئي B من M يحقق أن $M/B \cong A$ ينتج أن B حد مباشر في M.

مبرهنة 2-2.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R و $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$, عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 - المودول N هو $M-$إسقاطي مباشر.

2 - المودول $[M,N]$ هو D_2-مودول.

البرهان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن المودول N هو $M-$إسقاطي مباشر وليكن A حداً مباشراً للمودول N وأن B مودول جزئي من M يحقق أن $M/B \cong A$ ولنفرض أن هذا التماثل هو $\alpha : M/B \to A$ ولنفرض أيضاً أن $\lambda : M \to M/B$ التشاكل القانوني الغامر, عندئذ فإن $\alpha\lambda : M \to A$ هو تشاكل مودولات غامر وأن A حد مباشر للمودول N ولما كان المودول N هو $M-$إسقاطي مباشر فإنه يوجد تشاكل مودولات $\mu : N \to M$ يحقق أن $(\alpha\lambda)\mu = \pi$ حيث إن $\pi : N \to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر ومنه نجد أن $(\alpha\lambda)\mu\pi = \pi^2 = \pi$. لنبرهن على أن $Ker(\mu\pi) = Ker(\pi)$. واضح أن: $Ker(\pi) \subseteq Ker(\mu\pi)$

ليكن $x \in Ker(\mu\pi)$, عندئذ فإن $x \in N$ وأن $(\mu\pi)(x) = 0$ ومنه نجد أن:

$$\pi(x) = (\alpha\lambda)(\mu\pi)(x) = (\alpha\lambda)(0) = 0$$

وهذا يبين أن $x \in Ker(\pi)$ وبالتالي يكون $Ker(\mu\pi) \subseteq Ker(\pi)$ وهكذا فإن:

$Ker(\mu\pi) = Ker(\pi)$ ولما كان $(\alpha\lambda)(\mu\pi) = \pi$ نجد أن

$\pi(\alpha\lambda)(\mu\pi) = \pi^2 = \pi$ وأن $(\mu\pi)(\alpha\lambda)(\mu\pi) = \mu\pi$.

لنبرهن الآن على أن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) = Ker(\alpha\lambda)$.

واضح أن $Ker(\alpha\lambda) \subseteq Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$.

ليكن $y \in Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$, عندئذ فإن $y \in N$ وأن $(\mu\pi)(\alpha\lambda)(y) = 0$ ومنه فإن:

$$(\alpha\lambda)(y) \in Ker(\mu\pi) = Ker(\pi)$$

وهذا يبين أن $\pi(\alpha\lambda)(y) = (\alpha\lambda)(y) = 0$ ومنه فإن $y \in Ker(\alpha\lambda)$ وبالتالي يكون:

$Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) \subseteq Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda) = Ker(\alpha\lambda)$.

لنبرهن الآن على أن $Ker(\alpha\lambda) = B$.

ليكن $y \in Ker(\alpha\lambda)$, عندئذ فإن $y \in M$ وأن $\alpha\lambda(y) = 0$ ولما كان α تماثلاً نجد أن $\lambda(y) = 0$ ومنه فإن $y + B = B$ وبالتالي فإن $y \in B$ وهكذا فإن $Ker(\alpha\lambda) \subseteq B$.

ليكن $b \in B$, عندئذ فإن $b + B = B$ ومنه فإن $\lambda(b) = B = 0$ ومنه يكون $\alpha\lambda(b) = 0$ وبالتالي فإن $b \in Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا فإن $B \subseteq Ker(\alpha\lambda)$ ومنه يكون $Ker(\alpha\lambda) = B$. ولما كان: $(\mu\pi)(\alpha\lambda) \in E_M$ عنصراً جامداً فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$ حد مباشر في M وبالتالي يكون $Ker(\alpha\lambda) = B$ حد مباشر في M وهكذا نجد أن $[M, N]$ هو D_2-مودول.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن $[M, N]$ هو D_2-مودول وليكن A حداً مباشراً للمودول N وأن $\alpha : M \to A$ تشاكل مودولات غامر, لما كان $M/Ker(\alpha) \cong Im(\alpha) = A$ وأن المودول $[M, N]$ هو D_2- مودول ينتج أن $Ker(\alpha)$ حد مباشر للمودول M وبالتالي يوجد تشاكل مودولات $\beta : N \to M$ بحيث يكون $\alpha\beta\alpha = \alpha$ ومنه فإن $e = \alpha\beta \in E_N$ عنصر جامد وأن:

$$Im(e) = Im(\alpha\beta) \subseteq Im(\alpha) = Im(\alpha\beta\alpha) \subseteq Im(\alpha\beta)$$

وهذا يبين أن $Im(e) = Im(\alpha\beta) = Im(\alpha) = A$. لنفرض أن $\pi : N \to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر, عندئذ أياً كان $x \in N$ فإن $x = e(x) + (1-e)(x)$ وأن $e(x) \in A$ ومنه فإن $\pi(x) = e(x)$ وبالتالي يكون $\pi = e$ ومنه نجد أن $\alpha\beta = \pi$ وهذا يبين أن المودول N هو $M-$ إسقاطي مباشر.

3 – المودولات $N-$ الأفقية المباشرة.

تعريف [6].

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. نقول عن المودول M إنه $N-$ أفقي مباشر إذا كان لأجل أي حد مباشر K للمودول M ولأجل أي تشاكل متباين $\alpha : K \to N$ يوجد تشاكل مودولات $\beta : N \to M$ بحيث $\beta\alpha = \tau$ حيث $\tau : K \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني.

ونقول عن المودول M إنه أفقي مباشر إذا كان M هو $M-$ أفقي مباشر, [2].

مبرهنة 3−1.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R و $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$, عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − المودول $[M,N]$ شبه منتظم.

2 − المودول M هو $N-$أفقي مباشر ولأجل كل عنصر مغاير للصفر $f \in [M,N]$ فإن $Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M.

البرهان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن المودول $[M,N]$ شبه منتظم وليكن $f \in [M,N]$ عنصراً مغايراً للصفر, بحسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in [N,M]$ بحيث إن $g = gfg$ ومنه فإن $gf \in E_M$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن $Ker(gf) \neq M$ حد مباشر للمودول M وأن: $Ker(f) \subseteq Ker(gf)$

ليكن K حداً مباشراً للمودول M وأن $f : K \to M$ تشاكل مودولات متباين ولنفرض أن $\pi : M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر, عندئذ فإن $\pi f : M \to N$ عنصر مغاير للصفر ولما كان المودول $[M,N]$ شبه منتظم فإنه يوجد عنصر $\beta \in [N,M]$ بحيث إن $\beta \neq 0$ ويحقق $\beta(f\pi)\beta = \beta$ ومنه فإن $(\pi\beta) f (\pi\beta) = \pi\beta$.

لنضع $e = (\pi\beta) f\pi$, فنجد أن $e \in E_M$ عنصر جامد مغاير للصفر وأن:

$$Im(e) = Im(\pi\beta)(f\pi) \subseteq Im(\pi) = K$$

ومنه أياً كان $x \in M$ فإن $e(x) \in K$ ولما كان $x = e(x) + (1-e)(x)$ نجد أن $\pi(x) = e(x)$.

ليكن $y \in K$, عندئذ فإن: $y = \pi(y) = e(y) = (\pi\beta) f\pi(y) = (\pi\beta) f(y)$

وهذا يبين أن $(\pi\beta) f = \tau$ حيث $\tau : K \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني. مما سبق نجد أن المودول M هو $N-$أفقي مباشر.

$(2) \Rightarrow (1)$. ليكن $f \in [M,N]$ عنصراً مغايراً للصفر, بحسب الفرض فإن $Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M, ومنه يوجد مودول جزئي D في M بحيث يكون $M = K \oplus D$. لنفرض أن $f_D : D \to N$ هو مقصور التشاكل f على D. لما كان $Ker(f) \subseteq K$ ينتج أن f_D متباين ولما كان المودول M هو $N-$أفقي مباشر فإنه يوجد تشاكل مودولات $\beta : N \to M$ يحقق أن $\beta f_D = \tau$ حيث $\tau : D \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني. لنفرض أن $\pi : M \to D$ التشاكل الإسقاطي الغامر, عندئذ فإن $\beta f_D \pi = \tau\pi = \pi$ وأن $(\pi\beta) f_D \pi = \pi$. فضلاً عن ذلك, إن: $(\pi\beta) f_D (\pi\beta) = \pi\beta$ كما أن $\pi\beta \in [N,M]$ وأن $\pi\beta \neq 0$, لأنه إذا كان $\pi\beta = 0$ نجد أن $\pi = (\pi\beta) f_D \pi = 0$ وهذا غير ممكن, مما سبق نجد أن المودول $[M,N]$ شبه منتظم.

تعريف.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R. نقول عن المودول $[M,N]$ إنه C_2-مودول إذا كان لأجل أي حد مباشر A للمودول M ولأجل أي مودول جزئي B من N يحقق أن $B \cong A$ ينتج أن B حد مباشر في N.

مبرهنة 3−2.

ليكن M, N مودولين فوق حلقة R و $E_M = End_R(M)$ و $E_N = End_R(N)$, عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − المودول M هو $N-$أفقي مباشر.

2 − المودول $[M,N]$ هو C_2-مودول.

البرهان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M هو $N-$أفقي مباشر وليكن A حداً مباشراً للمودول M وأن B مودول جزئي في N بحيث $A\cong B$. لنفرض أن $\alpha:A\to B$ هذا التماثل ولنفرض أن $\tau_B:B\to N$ تشاكل الاحتواء القانوني, عندئذ يكون $\tau_B\alpha:A\to N$ تشاكل مودولات متباين.

لنفرض أيضاً أن $\tau_A:A\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني, لما كان المودول M هو $N-$أفقي مباشر فإنه يوجد تشاكل مودولات $\beta:N\to M$ بحيث إن $\beta(\tau_B\alpha)=\tau_A$.

بفرض أن $\pi:M\to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر, نجد أن $\beta(\tau_B\alpha)\pi=\tau_A\pi=\pi$. فضلاً عن ذلك, إن $\pi\beta(\tau_B\alpha)\pi=\pi^2=\pi$ وهذا يبين أن $Im(\pi\beta)=Im(\pi)=A$, لأن:

$$Im(\pi)=Im(\pi\beta)(\tau_B\alpha)\pi\subseteq Im(\pi\beta)\subseteq Im(\pi)$$

كذلك إن, $\pi\beta(\tau_B\alpha)\pi\beta=\pi\beta$ ومنه نجد أن $(\tau_B\alpha)\pi\beta\in E_N$ هو عنصر جامد وبالتالي فإن: $Im(\tau_B\alpha)(\pi\beta)$ حد مباشر في N , ولما كان:

$Im(\tau_B\alpha)(\pi\beta)=(\tau_B\alpha)(\pi\beta)(N)=(\tau_B\alpha)(\pi)(A)=(\tau_B\alpha)(A)=\tau_B(B)=B$ نجد أن B حد مباشر في N

وهذا يبين أن $[M,N]$ هو C_2-مودول.

$(2)\Leftarrow(1)$. لنفرض أن المودول $[M,N]$ هو C_2-مودول وليكن A حداً مباشراً للمودول M وأن $\alpha:A\to N$ تشاكل مودولات متباين, عندئذ فإن $A\cong\alpha(A)$ ولما كان $[M,N]$ هو C_2-مودول وأن A حد مباشر في M ينتج أن $\alpha(A)$ حد مباشر في N ومنه فإن $M=\alpha(A)\oplus K$ حيث K مودول جزئي في N . لنفرض أن $\pi:N\to\alpha(A)$ التشاكل الإسقاطي الغامر, عندئذ فإن: $Im(\pi)=\alpha(A)$

ومنه أياً كان $a\in A$ فإن $\alpha(a)\in\alpha(A)=Im(\pi)$

وهذا يبين أن $\pi(\alpha(a))=\alpha(a)$ وبالتالي يكون:

$$\alpha^{-1}(\pi(\alpha(a)))=\alpha^{-1}(\alpha(a))=a=\tau(a)$$

ومنه نجد أن $(\alpha^{-1}\pi)\alpha=\tau$ حيث $\tau:A\to M$ تشاكل الاحتواء القانوني, ومنه فإن المودول M هو $N-$أفقي مباشر.

المراجع:

[1] – Anderson, F. W. and Fuller, K. R., " Rings and Categories of Modules ", New York. Springer 1973.
[2] – Derya, K. and Rachid, T., " A Note on Endomorphism Rings of Semi-Projective Modules ", Math. Proc. Royal Irish Academy. 112A, No, 2, (2012), p. 93 – 99.
[3] – Hamza, H., " I_0 – Rings and I_0 – Modules ", Math. J. Okayama Univ. 40, p. (1998) .[2000]. 91–97
[4] – Kasch, F., and Mader, A., " Rings, Modules, and The Total", Front. Math., Birkhauser Verlag, Basel, (2004).
[5] Ware, R., " Endomorphism Rings of Projective Modules ", Trans. Amer. Math. Soc. 155, p. 233 – 256. (1971).
[6] – Wisbauer, R., " Foundations of Modules and Rings ", Gordon, 1991.
[7] – Zhou, Y., " On (Semi) Regularity and The Total of Rings and Modules ". Journal of Algebra, 322, (2009).p. 562 – 578.