مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 39– عدد 4 (2023): 46–35

Damascus University Journal for the Basic Sciences
Vol 39 No.4 (2023): 35 -46

الحلقات شبه المنتظمة

بشار الحسين[1] ، أ.د حمزة حاكمي[2]

[1] طالب دراسات عليا قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

[2] أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم جامعة دمشق.

الملخص

تعد دراسة العلاقة بين مفهوم الانتظام في الحلقات وبين أنواع محددة من المودولات مثل C_i- مودولات و D_i- مودولات، حيث $i = 2,3,4$، من المواضيع المعاصرة في نظرية الحلقات والمودولات. ولما كانت كل حلقة منتظمة هي شبه منتظمة، فقد درسنا في هذه المقالة العلاقة بين الحلقات شبه المنتظمة وبين C_i- مودولات و D_i- مودولات، حيث $i = 2,3$. حيث أثبتنا أنه لأجل أي مودول M فإن الحلقة $S = End_R(M)$ تكون شبه منتظمة عندما وفقط عندما يكون M هو D_2- مودول وأنه لأجل كل S خ f ¹ 0 فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M ويكافئ كون M هو C_2- مودول وأنه لأجل كل S خ f ¹ 0 فإن $Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M.

أخيراً أثبتنا أنه إذا كانت الحلقة $S = End_R(M)$ شبه منتظمة فإن المودول M هو D_3- مودول و C_3- مودول في آن واحد.

الكلمات المفتاحية: الحلقة المنتظمة وشبه المنتظمة، D_2- مودول، D_3- مودول، C_2- مودول، C_3- مودول، المودولات الإسقاطية (الأفقية) المباشرة.

التصنيف الرياضياتي العالمي للعام (2020): 16P40، 16P20، 16D40، 16D50.

تاريخ الإيداع: 2022/06/16
تاريخ الموافقة: 2022/08/30

Semi-Regular Rings

Bashar Alhussein[1], Prof. Hamza Hakmi[2]

[1] Graduate Student. Department of Mathematics، Faculty of Science، Damascus University.

[2]Proof. Department of Mathematics، Faculty of Science، Damascus University.

Abstract

The study of relation between regularity and certain kinds of modules such as C_i −modules and D_i −modules، where $i = 2,3,4$، is a modern subject in Rings and modules theory. Since every regular ring is semi-regular، we study the relation between semi-regular ring and C_i −modules، D_i − modules، where $i = 2,3$.

We prove that for every module M، the ring $S = End_R(M)$ is semi-regular if and only if M is D_2 −module and for every non-zero element $f \in S$، $Im(f)$ contains a non-zero direct summand of M.

In addition، we proved that for every module M، the ring $S = End_R(M)$ is semi-regular if and only if M is C_2 −module and for every non-zero element $f \in S$، $Ker(f)$ contained in a direct summand $K \neq M$ of M.

Finally، we prove that if the ring $S = End_R(M)$ is semi-regular، then M is D_3 −module and C_3 −module.

Key Words: Regular and semi-regular ring، D_2 −Module and D_3 −Module، C_2 − Module and C_3 −Module، Direct Projective (Injective) module.

2020 Mathematics Subject Classification: 16P40 ،16P20 ،16D40 ،16D50.

Received :2022/06/ 16
Accepted:2022/08/30

المقدمة.

منذ ظهور مفهوم الانتظام في الحلقات عام 1936 وإلى الآن لا يزال هذا المفهوم يشغل بال الكثير من الجبريين على مستوى العالم، الأمر الذي أدى إلى ظهور عدد كبير من الأعمال تدرس العلاقة بين المودول وحلقة الإندومورفيزمات لهذا المودول. على سبيل المثال في عام 1971 أثبت R. Ware في [8] أن الشرط اللازم والكافي كي تكون حلقة الإندومورفيزمات لمودول ما M، منتظمة هو أن تكون النواة والصورة المباشرة لأي تشاكل لهذا المودول حدوداً مباشرة في M.

وفي عام 2014 أثبت A. A. Tuganbaev & A.H. Abyzov في[3] أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مودول ما M هو $SSP-$مودول (المودول الذي فيه مجموع حدين مباشرين هو حد مباشر، [1]) هو أن يحقق الشرط، لأجل أي عنصرين منتظمين $f, g \in End_R(M)$ لأجلهما $Im(fg)$ حد مباشر في المودول M فإن $Ker(fg)$ حد مباشر في M. فضلاً عن ذلك، أثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون مودول ما M هو $SIP-$مودول (المودول الذي فيه تقاطع حدين مباشرين هو حد مباشر، [1]) هو أن يحقق الشرط، لأجل أي عنصرين منتظمين $f, g \in End_R(M)$ لأجلهما $Ker(fg)$ حد مباشر في المودول M فإن $Im(fg)$ حد مباشر في M.

في هذه الورقة العلمية درسنا العلاقة بين المودول وحلقة الإندومورفيزمات له وذلك في حالة كون هذه الحلقة شبه منتظمة. في البداية أوردنا عدداً من الشروط اللازمة والكافية كي تكون حلقة إندومورفيزمات لمودول ما شبه منتظمة. بعد ذلك درسنا العلاقة بين D_2-مودولات و D_3-مودولات وبين حلقة الإندومورفيزمات لهذه المودولات وذلك في حال كانت هذه الحلقة شبه منتظمة. وأخيراً درسنا العلاقة بين C_2-مودولات و C_3-مودولات وبين حلقة الإندومورفيزمات لهذه المودولات وذلك في حال كانت هذه الحلقة شبه منتظمة.

جميع الحلقات التي ستتم دراستها هي حلقات واحدية والمودولات فوق هذه الحلقات هي مودولات يمينية.

1 – الحلقـات شبـه المنتظمـة.

تمهيد.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. لنأخذ المجموعات الآتية:

$$D(M) = \{a \in S; Im(1-ab) \subseteq^{\oplus} M \quad \text{for some } 0 \neq b \in S\}$$

$$\bar{D}(M) = \{a \in S; Im(1-ba) \subseteq^{\oplus} M \quad \text{for some } 0 \neq b \in S\}$$

$$D^{\bullet}(M) = \{a \in S; Im(1-ab) \subseteq T \subseteq^{\oplus} M \quad \text{for some } 0 \neq b \in S\}$$

$$K(M) = \{ a : a \in S; \ Ker(1-ab) \subseteq^{\oplus} M \quad \text{for some } 0 \neq b \in \mathrm{S} \}$$

$$\bar{K}(M) = \{ a : a \in S; \ Ker(1-ba) \subseteq^{\oplus} M \quad \text{for some } 0 \neq b \in \mathrm{S} \}$$

$$K^{\bullet}(M) = \{ a : a \in S; \ Ker(1-ab) \cap K \subseteq^{\oplus} M, K \neq 0 \text{ for some } 0 \neq b \in \mathrm{S} \}$$

من الواضح أن جميع المجموعات السابقة هي مجموعات جزئية غير خالية في الحلقة S. فضلاً عن ذلك، إن المجموعات السابقة ترتبط مع بعضها البعض بعدد من العلاقات سنذكر بعضاً منها من خلال التمهيدية الآتية:

تمهيديـة 1-1.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ القضايا الآتية صحيحة:

1 - $K(M) = \bar{K}(M)$.

2 - $K(M) = K^{\bullet}(M)$.

3 - $K(M) = \bar{K}(M) = K^{\bullet}(M)$.

البرهان.

1 – ليكن $f \in K(M)$ ، عندئذ حسب التعريف يوجد $g \in S$ بحيث $Ker(1-fg)$ حد مباشر في M وبالتالي يوجد عنصر جامد $e \in S$ بحيث $Ker(1-fg) = Im(e)$ ومنه فإن $(1-fg)e = 0$ وبالتالي فإن $e = fge$ وأن $e = efge$ ومنه فإن $ge = (ge)f(ge)$.

لنضع $h = ge$ فنجد أن $h \in S$ ويحقق أن $h = hfh$ ومنه فإن $hf \in S$ عنصر جامد وبالتالي يكون $1-hf \in S$ هو أيضاً عنصر جامد ومنه فإن $Ker(1-hf)$ حد مباشر في M وهذا يبين أن $f \in \overline{K}(M)$ وبالتالي يكون $K(M) \subseteq \overline{K}(M)$. بالمثل يمكننا إثبات صحة الاحتواء $\overline{K}(M) \subseteq K(M)$. وهكذا نجد أن $K(M) = \overline{K}(M)$.

2 – من الواضح أن $K(M) \subseteq K^{\bullet}(M)$. ليكن $f \in K^{\bullet}(M)$ ، عندئذ حسب التعريف يوجد $g \in S$ بحيث $Ker(1-fg)$ تحوي حد مباشر N للمودول M.

لنفرض أن $e: M \to N$ التشاكل الإسقاطي الغامر، فنجد أن $Im(e) = N \subseteq Ker(1-fg)$ ومنه فإن $Im(1-fg)e = 0$ وبالتالي فإن $(1-fg)e = 0$ ومنه يكون $e = fge$ وأن $e = efge$ ومنه فإن $ge = (ge)f(ge)$.

لنضع $h = ge$ فنجد أن $h \in S$ ويحقق أن $h = hfh$ ومنه فإن $hf \in S$ عنصر جامد وبالتالي يكون $1-hf \in S$ عنصر جامد ومنه فإن $Ker(1-hf)$ حد مباشر في M وهذا يبين أن f خ $\overline{K}(M)$ ومنه فإن $f \in K(M)$ وبالتالي يكون $K^{\bullet}(M) \subseteq K(M)$ وهكذا فإن $K(M) = K^{\bullet}(M)$.

3 – ينتج مباشرة من (1) و (2).

تعريف.

لتكن R حلقة.

– نقول عن العنصر $a \in R$ إنه شبه منتظم إذا وجد عنصر مغاير للصفر $b \in R$ يحقق أن $b = bab$. ونقول عن الحلقة R إنها شبه منتظمة إذا كانت جميع عناصرها المغايرة للصفر شبه منتظمة، [4].

– نقول عن العنصر $a \in R$ إنه منتظم إذا وجد عنصر $b \in R$ يحقق أن $a = aba$. ونقول عن الحلقة R إنها منتظمة إذا كانت جميع عناصرها منتظمة، [7].

سندرس الآن عدداً من الشروط اللازمة والكافية لمفهوم العناصر شبه المنتظمة وذلك من خلال المبرهنات الآتية:

مبرهنة 1–2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر مغاير للصفر $f \in S$ القضايا الآتية متكافئة:

1 – العنصر f شبه منتظم.

2 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $Ker(1-fg)$ حد مباشر في M.

3 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in S$ بحيث $Ker(1-hf)$ حد مباشر في M.

4 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $Ker(1-fg)$ يحوى حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M.

5 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in S$ بحيث $Ker(1-hf)$ يحوى حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M.

البرهان.

$(1)\Rightarrow(2)$. لنفرض أن العنصر f شبه منتظم، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $g = gfg$ ومنه نجد أن $fg \in S$ عنصر جامد وبالتالي يكون $1-fg \in S$ هو أيضاً عنصر جامد وهذا يبين أن $Ker(1-fg)$ حد مباشر في M.

$(2)\Rightarrow(4)$. واضح.

$(4)\Leftarrow(1)$. لنفرض أنه يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $Ker(1-fg)$ تحوى حداً مباشراً مغايراً للصفر K للمودول M ولنفرض أن $e: M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن:

$$Im(e)=K \subseteq Ker(1-fg)$$

ومنه نجد أن $(1-fg)e=0$ وبالتالي يكون $e=fge$ وأن $e=efge$ ومنه نجد أن:

$$ge=(ge)f(ge)$$

لنفرض أن $h=ge$ فنجد أن $h \in S$ ويحقق أن $h=hfh$. فضلاً عن ذلك، إن $h \neq 0$، لأنه إذا كان $h=0$ نجد أن $e=fge=fh=0$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر f شبه منتظم.

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1)\Leftrightarrow(3)\Leftrightarrow(5)$.

اعتماداً على المبرهنة الأخيرة يمكن صياغة النتيجة الآتية:

نتيجة.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة S شبه منتظمة.

2 – $S=K(M)=\overline{K}(M)=K^{\bullet}(M)$.

مبرهنة 1-3.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ لأجل أي عنصر مغاير للصفر $f \in S$ القضايا الآتية متكافئة:

1 – العنصر f شبه منتظم.

2 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $Im(1-fg)$ حد مباشر في M.

3 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in S$ بحيث $Im(1-hf)$ حد مباشر في M.

4 – يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $Im(1-fg)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M.

5 – يوجد عنصر مغاير للصفر $h \in S$ بحيث $Im(1-hf)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M.

البرهـان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن العنصر f شبه منتظم، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $g=gfg$ ومنه نجد أن $fg \in S$ هو عنصر جامد وبالتالي يكون $1-fg \in S$ هو أيضاً عنصر جامد وهذا يبين أن $Im(1-fg)$ حد مباشر في M.

$(2)\Leftarrow(4)$. واضح.

$(4)\Leftarrow(1)$. لنفرض أنه يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $Im(1-fg)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M ولنفرض أن $e: M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ:

$$Im(1-fg) \subseteq K = Im(e)$$

ومنه نجد أن $e(1-fg)=1-fg$ وبالتالي يكون $e-efg=1-fg$ ومنه فإن $1-e=fg-efg$ وأن $1-e=(1-e)fg$. فضلاً عن ذلك، إن $1-e=(1-e)fg(1-e)$ وأن:

$$g(1-e)=g(1-e)fg(1-e)$$

لنضع $h=g(1-e)$ فنجد أن $h \in S$ ويحقق أن $h=hfh$. فضلاً عن ذلك، إن $h \neq 0$، لأنه إذا كان $h=0$ نجد أن:

$$1-e=(1-e)fg(1-e)=(1-e)fh=0$$

ومنه فإن $e=1$ وبالتالي $K=M$ وهذا غير ممكن. مما سبق نجد أن العنصر f شبه منتظم.

بطريقة مشابهة يمكننا إثبات صحة التكافؤ $(1) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (5)$.

اعتماداً على المبرهنة الأخيرة يمكنن صياغة النتيجة الآتية:

نتيجـة.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 – الحلقة S شبه منتظمة.

2 – $S = D(M) = \overline{D}(M) = D^{\bullet}(M)$

2 – المودولات الإسقاطيـة المباشرة.

تعريـف.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه إسقاطي مباشر إذا كان لأجل كل حد مباشر K للمودول M ولأجل كل تشاكل غامر $f : M \to K$ يوجد عنصر $g \in S$ يحقق أن $fg = \pi$ ، حيث $\pi : M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر، [5].

مبرهنـة 2–1.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 – الحلقة S شبه منتظمة.

2 – المودول M إسقاطي مباشر وأنه لأجل كل عنصر مغاير للصفر $f \in S$ فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M .

3 – المودول M إسقاطي مباشر وأنه لأجل كل عنصر $f \in S$ بحيث $f \neq 1$ فإن $Im(1-f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M .

البرهـان.

$(1) \Longrightarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة S شبه منتظمة وليكن $f \in S$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $g = gfg$ ومنه فإن $fg \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن $Im(fg)$ حد مباشر مغاير للصفر للمودول M وأن $Im(fg) \subseteq Im(f)$.

لنبرهن على أن المودول M إسقاطي مباشر. ليكن K حداً مباشراً للمودول M وأن $\alpha : M \to K$ تشاكلاً غامراً ولنفرض أن $\pi : M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر.

– إذا كان $K = 0$ ، عندئذ فإن $\alpha = \pi = 0$ بذلك يتم المطلوب.

– لنفرض أن $K \neq 0$ ، عندئذ $\alpha \neq 0$ ولما كانت الحلقة S شبه منتظمة فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in S$ بحيث $\beta = \beta\alpha\beta$. لنضع $e = \alpha\beta$ فنجد أن $e \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر ولما كان $1 = e + (1-e)$ نجد أنه أياً كان $m \in M$ فإن $m = e(m) + (1-e)(m)$ فضلاً عن ذلك، إن:

$$e(m) = \alpha\beta(m) \in Im(\alpha) = K$$

ومنه فإن $e(m) = \pi(m)$ وبالتالي $e = \pi$ ومنه نجد أن $\alpha\beta = \pi$ وهذا يبين أن المودول M إسقاطي مباشر.

$(2) \Longrightarrow (3)$. لدينا حسب الفرض أن المودول M إسقاطي مباشر. ليكن $f \in S$ ، $f \neq 1$ ، عندئذ فإن $1 - f \in S$ عنصر مغاير للصفر، وحسب الفرض فإن $Im(1-f)$ يحوي حداً مباشراً K مغايراً للصفر للمودول M .

$(3)\Leftarrow(1)$. ليكن $f\in S$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ فإن $1-f\in S$ وأن $1-f\neq 1$ وحسب الفرض فإن $Im(1-(1-f))=Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر K للمودول M. لنفرض أن $\pi:M\to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ $Im(\pi)=K\subseteq Im(f)$ ومنه نجد أن:

$$Im(\pi f)=Im(\pi)=K$$

وهذا يبين أن $\pi f:M\to K$ تشاكل غامر ولما كان المودول M إسقاطياً مباشراً فإنه يوجد عنصر $g\in S$ بحيث $(\pi f)g=\pi$ ومنه نجد أن $(\pi f)g\pi=\pi$ وبالتالي يكون $(g\pi)f(g\pi)=g\pi$. لنضع $h=g\pi$ فنجد أن $h\in S$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $h=hfh$ ومنه نجد أن الحلقة S شبه منتظمة.

تعريف.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. نقول عن M إنه D_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A,B من المودول M يحققان إن $M/B\cong A$ وكان A حد مباشر في M ينتج أن B حد مباشر في M، [6].

مبرهنة 2-2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S=End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 - المودول M إسقاطي مباشر.

2 - المودول M هو D_2-مودول.

البرهــان.

$(1)\Leftarrow(2)$. لنفرض أن المودول M إسقاطي مباشر وليكن A حداً مباشراً في M ولنفرض أيضاً أن B مودول جزئي في M ويحقق $M/B\cong A$.

لنفرض أن $\alpha:M/B\to A$ هو هذا التماثل وأن $\pi:M\to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر وأن $\lambda:M\to M/B$ التشاكل القانوني الغامر، فنجد أن $\alpha\lambda:M\to A$ هو تشاكل غامر ولما كان المودول M إسقاطياً مباشراً فإنه يوجد $\mu\in S$ بحيث $(\alpha\lambda)\mu=\pi$. لنبرهن على أن:

$$Ker(\mu\pi)=Ker(\pi)$$

واضح أن $Ker(\pi)\subseteq Ker(\mu\pi)$. ليكن $x\in Ker(\mu\pi)$ عندئذ $x\in M$ وأن $\mu\pi(x)=0$ ومنه فإن $(\alpha\lambda)\mu\pi(x)=0$ وبالتالي فإن $\pi^2(x)=\pi(x)=0$، أي إن $x\in Ker(\pi)$ ومنه فإن:

$$Ker(\mu\pi)\subseteq Ker(\pi)$$

وهكذا نجد أن $Ker(\mu\pi)=Ker(\pi)$.ولما كان $(\alpha\lambda)\mu=\pi$ نجد أن $\pi(\alpha\lambda)\mu\pi=\pi$ وبالتالي فإن

$$(\mu\pi)(\alpha\lambda)(\mu\pi)=\pi\mu$$

لنبرهن الآن على أن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)=Ker(\alpha\lambda)$. واضح أن $Ker(\alpha\lambda)\subseteq Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$.

ليكن $x\in Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$، عندئذ فإن $(\mu\pi)(\alpha\lambda)(x)=0$ ومنه فإن $(\alpha\lambda)(\mu\pi)(\alpha\lambda)(x)=0$ وبالتالي فإن $\pi^2(\alpha\lambda)(x)=0$ ومنه يكون $\pi(\alpha\lambda)(x)=0$ ولما كان $(\alpha\lambda)(x)\in A$ نجد أن $(\alpha\lambda)(x)=0$ ومنه فإن $x\in Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا نجد أن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)\subseteq Ker(\alpha\lambda)$ ومنه فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)=Ker(\alpha\lambda)$. لنبرهن أن $Ker(\alpha\lambda)=B$.

ليكن $y\in Ker(\alpha\lambda)$، عندئذ فإن $(\alpha\lambda)(y)=0$ ومنه فإن $\lambda(y)=0$ وأن $y+B=B$ ومنه فإن $y\in B$، أي إن $Ker(\alpha\lambda)\subseteq B$. ليكن $b\in B$، عندئذ فإن $b+B=B$ ومنه يكون $\lambda(b)=B=0$ ومنه $(\alpha\lambda)(b)=0$ وبالتالي

فإن $b \in Ker(\alpha\lambda)$ ومنه $B \subseteq Ker(\alpha\lambda)$ وهكذا فإن $Ker(\alpha\lambda) = B$. ولما كان $(\mu\pi)(\alpha\lambda) \in S$ عنصر جامد فإن $Ker(\mu\pi)(\alpha\lambda)$ هو حد مباشر في M وبالتالي فإن $Ker(\alpha\lambda) = B$ حد مباشر في M .

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن K حد مباشر للمودول M وأن $f : M \to K$ تشاكل مودولات غامر ولنفرض أيضاً أن $\pi : M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر. لما كان $M / Ker(f) \cong Im(f) = K$ وأن M هو D_2-مودول فإن $Ker(f)$ حد مباشر في M ومنه فإن التشاكل f منتظم وبالتالي يوجد $g \in S$ بحيث $fgf = f$ وهذا يبين أن $fg \in S$ عنصر جامد ولما كان $fg(x) \in K$ أياً كان $x \in M$ وأن $x = fg(x) + (1 - fg)(x)$ نجد أن $\pi(x) = fg(x)$ ومنه فإن $fg = \pi$ وهكذا فإن المودول M إسقاطي مباشر.

لنورد التعريف الآتي:

تعريف.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. نقول عن M إنه D_3-مودول إذا كان لأجل أي حدين مباشرين A, B للمودول M يحققان $M = A + B$ إن $A \cap B$ ينتج أن حد مباشر في M، [2].

لدراسة العلاقة بين الحلقات شبه المنتظمة والـD_3-مودولات سنعتمد على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 2−3 [5].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − M هو D_3-مودول.

2 − لأجل أي عنصرين منتظمين $f, g \in S$ يحققان أن $Im(fg)$ حد مباشر في M فإن $Ker(fg)$ حد مباشر في M .

مبرهنة 2−4.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. إذا كانت الحلقة S شبه منتظمة، عندئذ فإن:

1 − M هو D_3-مودول وأنه لأجل كل عنصر مغاير للصفر $f \in S$ فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M .

2 − M هو D_3-مودول وأنه لأجل كل عنصر f خ S ¹ 1 فإن $Im(1-f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M .

البرهان.

1 − لنفرض أن الحلقة S شبه منتظمة، عندئذ بحسب المبرهنتين (2−1) و(2−2) فإن M هو $D_2 -$ مودول. ليكن $f, g \in S$ عنصرين منتظمين بحيث $Im(fg)$ حد مباشر في M ولما كان:

$$M / Ker(fg) \cong Im(fg)$$

نجد أن $Ker(fg)$ حد مباشر في M وبحسب المبرهنة (2−3) فإن M هو D_3-مودول.

ليكن $f \in S$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $g = gfg$ ومنه فإن $fg \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن $Im(fg)$ حد مباشر مغاير للصفر للمودول M وأن $Im(fg) \subseteq Im(f)$.

2 − لدينا حسب (1) أن M هو D_3-مودول. ليكن $f \in S$ بحيث $f \neq 1$ ، عندئذ فإن $1 - f \in S$ عنصر مغاير للصفر، وحسب (1) فإن $Im(1-f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر K للمودول M .

3 – المـودولات الأفقيـة المباشـرة.

تعريف.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R و $S = End_R(M)$. نقول عن المودول M إنه أفقي مباشر إذا كان لأجل كل حد مباشر K للمودول M ولأجل كل تشاكل متباين $f : K \to M$ يوجد عنصر $g \in S$ يحقق أن $gf = \tau$، حيث $\tau : K \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني، [5].

مبرهنـة 3–1.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1– الحلقة S شبه منتظمة.

2– المودول M أفقي مباشر وأنه لأجل كل عنصر مغاير للصفر $f \in S$ فإن $Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M.

3– المودول M أفقي مباشر وأنه لأجل كل عنصر S خ f ^{1} 1، فإن $Ker(1-f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M.

البرهـان.

$(1) \Rightarrow (2)$. لنفرض أن الحلقة S شبه منتظمة وليكن $f \in S$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $g = gfg$ ومنه فإن $gf \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن $Ker(gf) \neq M$ حد مباشر للمودول M وأن $Ker(f) \subseteq Ker(gf)$.

لنبرهن أن المودول M أفقي مباشر.

ليكن K حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M وأن $\alpha : K \to M$ تشاكل متباين ولنفرض أن $\pi : M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر. عندئذ فإن $\alpha\pi \in S$ عنصر مغاير للصفر وبحسب الفرض يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $g = gfg$ وبالتالي يكون $(\pi g)\alpha(\pi g) = \pi g$. لنضع $e = (\pi g)\alpha$ فنجد أن $e \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر وأن $Im(e) \subseteq Im(\pi) = K$ وهذا يبين أن $e(m) \in K$ وذلك أياً كان $m \in M$، ولما كان $1 = e + (1-e)$ نجد أنه أياً كان $m \in M$ فإن $m = e(m) + (1-e)(m)$ ومنه فإن $e(m) = \pi(m)$.

ليكن $y \in K$، عندئذ فإن $y = \pi(y) = e(y) = \pi g\alpha(y)$. لنضع $\beta = \pi g$ فنجد أن $\beta \in S$ وأن $\beta\alpha = \tau$، حيث $\tau : K \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني، وهكذا نجد أن المودول المودول M أفقي مباشر.

$(2) \Rightarrow (3)$. لدينا بحسب الفرض أن المودول M أفقي مباشر. ليكن $f \in S$ بحيث $f \neq 1$، عندئذ فإن $1 - f \in S$ عنصر مغاير للصفر، وبحسب الفرض فإن $Ker(1-f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M، أي إن $Ker(1-f) \subseteq K$.

لما كان $K \neq M$ حد مباشر للمودول M فإنه يوجد في M مودول جزئي مغاير للصفر N بحيث $M = K \oplus N$. لنفرض أن $\alpha : N \to M$ هو مقصور التشاكل $1-f$ على N، فنجد أن التشاكل α متباين، لأن $Ker(1-f) \subseteq K$. ولما كان المودول M أفقي مباشر فإنه يوجد $\beta \in S$ بحيث $\beta\alpha = \tau$ وأن $\beta \neq 0$، حيث $\tau : N \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني. لنفرض أن $\pi : M \to N$ التشاكل الإسقاطي الغامر، فنجد أن $\alpha\pi \in S$ وأنه أياً كان $m \in M$ فإن $\beta\alpha\pi(m) = \pi(m)$ ومنه نجد أن $\beta(1-f)\pi(m) = \pi(m)$ وبالتالي يكون $\beta(1-f)\pi = \pi$ وهكذا نجد أن $(\pi\beta)(1-f)(\pi\beta) = \pi\beta$.

لنضع $h = (\pi\beta)(1-f)$، فنجد أن $h \in S$ عنصر جامد وأن $h \neq 1$، كما أن $Ker(h) \neq M$ حد مباشر في M. فضلاً عن ذلك، إن $Ker(1-f) \subseteq Ker(h)$.

$(3) \Rightarrow (1)$. ليكن $f \in S$ عنصر مغاير للصفر، عندئذ فإن $1 - f \in S$ وأن $1 - f \neq 1$ وحسب الفرض فإن $Ker(1-(1-f)) = Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M، أي إن $Ker(f) \subseteq K$ ولما

كان $K \neq M$ حداً مباشراً للمودول M فإنه يوجد في M مودولاً جزئياً مغايراً للصفر N في M بحيث $M = K \oplus N$. لنفرض أن $f_N : N \to M$ مقصور التشاكل f على N فنجد أن التشاكل f_N متباين ولما كان المودول M أفقياً مباشراً فإنه يوجد عنصر مغاير للصفر $\beta \in S$ بحيث $\beta f_N = \tau$، حيث $\tau : K \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني.

لنفرض أن $\pi : M \to K$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ أياً كان $m \in M$ فإن $\pi(m) \in N$ ومنه فإن:

$$\beta f_N \pi(m) = \tau\pi(m) = \pi(m)$$

وبالتالي يكون $\beta f \pi = \pi$ ومنه فإن $(\pi\beta) f \pi = \pi$ وأن $(\pi\beta) f (\pi\beta) = \pi\beta$.

لنضع $h = \pi\beta$ فنجد أن $h \in S$ عنصر مغاير للصفر ويحقق أن $h = hfh$ ومنه نجد أن الحلقة S شبه منتظمة.

تعريـف [2].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. نقول عن M إنه C_2-مودول إذا كان لأجل أي مودولين جزئيين A, B من المودول M يحققان إن $A \cong B$ وكان A حد مباشر في M ينتج أن B حد مباشر في M.

مبرهنـة 3−2.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. عندئذ الشروط الآتية متكافئة:

1 − المودول M أفقي مباشر.

2 − المودول M هو C_2-مودول.

البرهـان.

$(1) \Leftarrow (2)$. لنفرض أن المودول M أفقي مباشر وليكن A, B مودولين جزئيين في M بحيث $A \cong B$ وأن A حد مباشر في M ولنفرض أن $\alpha : A \to B$ هو هذا التماثل وأن $\tau_A : A \to M$ و $\tau_B : B \to M$ تشاكلي الاحتواء القانونيين، عندئذ فإن $\tau_B \alpha : A \to M$ هو تشاكل مودولات متباين ولما كان المودول M أفقياً مباشراً فإنه يوجد $\lambda \in S$ بحيث $\lambda(\tau_B \alpha) = \tau_A$. لنفرض أن $\pi : M \to A$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ يكون $\lambda(\tau_B \alpha)\pi = \tau_A \pi = \pi$ وبالتالي فإن $(\pi\lambda)(\tau_B \alpha)\pi = \pi^2 = \pi$ وهذا يبين أن $Im(\pi\lambda) = Im(\pi) = A$، لأن:

$$Im(\pi) = Im(\pi\lambda)(\tau_B \alpha)\pi \subseteq Im(\pi\lambda) \subseteq Im(\pi)$$

فضلاً عن ذلك، إن $(\pi\lambda)(\tau_B \alpha)(\pi\lambda) = \pi\lambda$ وهذا يبين أن $(\tau_B \alpha)(\pi\lambda) \in S$ عنصر جامد ومنه فإن $Im(\tau_B \alpha)(\pi\lambda)$ حد مباشر في M وأن:

$$Im(\tau_B \alpha)(\pi\lambda) = (\tau_B \alpha)(\pi\lambda)(M) = (\tau_B \alpha)(A) = B$$

ومنه فإن B حد مباشر في M.

$(2) \Leftarrow (1)$. لنفرض أن K حد مباشر للمودول M وأن $\alpha : K \to M$ تشاكل مودولات متباين، عندئذ فإن $\alpha : K \to \alpha(K)$ تماثل، أي إن $K \cong \alpha(K)$ ولما كان M هو C_2-مودول وأن K حد مباشر للمودول M نجد أن $\alpha(K)$ حد حد مباشر للمودول M ومنه فإن $M = \alpha(K) \oplus N$. لنفرض أن $\pi : M \to \alpha(K)$ التشاكل الإسقاطي الغامر، عندئذ فإن $\pi(M) = \alpha(K)$ ومنه نجد أن:

$$\pi(M) = \pi(\pi(M)) = \pi(\alpha(K))$$

ولما كان لأجل كل $k \in K$ فإن $\alpha(k) \in \alpha(K) = \pi(M)$ نجد أن $\pi(\alpha(k)) = \alpha(k)$ وهذا يبين لنا أن $\pi\alpha = \alpha$ ولما كان $\alpha : K \to \alpha(K)$ تماثل نجد أن $\alpha^{-1}\pi\alpha = \tau$ حيث $\tau : K \to M$ تشاكل الاحتواء القانوني. لنفرض أن $f = \alpha^{-1}\pi$ فنجد أن $f \in S$ وأن $f\alpha = \tau$ وهذا يبين أن المودول M أفقي مباشر.

لنورد الآن التعريف الآتي:

تعريف.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R. نقول عن M إنه C_3-مودول إذا كان لأجل أي حدين مباشرين A, B للمودول M يحققان إن $A \cap B = 0$ ينتج أن $A \oplus B$ حد مباشر في M، [5].

لدراسة العلاقة بين الحلقات شبه المنتظمة والـC_3-مودولات سنعتمد على المبرهنة الآتية:

مبرهنة 3−3 [5].

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. الشرطان الآتيان متكافئان:

1 − M هو C_3-مودول.

2 − لأجل أي عنصرين منتظمين $f, g \in S$ يحققان إن $Ker(fg)$ حد مباشر في M ينتج أن $Im(fg)$ حد مباشر في M.

مبرهنـة 3−4.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. إذا كانت الحلقة S شبه منتظمة، عندئذ فإن:

1 − M هو C_3-مودول وأنه لأجل كل عنصر مغاير للصفر $f \in S$ فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M.

2 − M هو C_3-مودول وأنه لأجل كل عنصر $f \in S$، $f \neq 1$ فإن $Im(1-f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M.

البرهان.

1 − لنفرض أن الحلقة S شبه منتظمة، عندئذ بحسب المبرهنتين (3−1) و(3−2) فإن M هو C_2- مودول. ليكن $f, g \in S$ عنصرين منتظمين بحيث $Ker(fg)$ حد مباشر في M، عندئذ يوجد مودول جزئي D في M يحقق أن $M = Ker(fg) \oplus D$ ومنه نجد أن:

$$D \cong M / Ker(fg) \cong Im(fg)$$

ولما كان M هو C_2-مودول نجد أن $Im(fg)$ حد مباشر في M وبحسب المبرهنة (3−3) فإن M هو C_3-مودول. ليكن $f \in S$ عنصراً مغايراً للصفر، عندئذ يوجد عنصر مغاير للصفر $g \in S$ بحيث $g = gfg$ ومنه فإن $fg \in S$ عنصر جامد مغاير للصفر وبالتالي فإن $Im(fg)$ حد مباشر مغاير للصفر للمودول M وأن $Im(fg) \subseteq Im(f)$.

2 − لدينا حسب (1) أن M هو C_3-مودول. ليكن $f \in S$ بحيث $f \neq 1$، عندئذ فإن $1-f \in S$ عنصر مغاير للصفر، وحسب (1) فإن $Im(1-f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M.

نتيجـة.

ليكن M مودولاً فوق حلقة R وأن $S = End_R(M)$. الشروط الآتية متكافئة:

1 − الحلقة S شبه منتظمة.

2 − M هو D_2-مودول وأنه لأجل كل عنصر مغاير للصفر $f \in S$ فإن $Im(f)$ يحوي حداً مباشراً مغايراً للصفر للمودول M.

3 − M هو C_2-مودول وأنه لأجل كل عنصر مغاير للصفر $f \in S$ فإن $Ker(f)$ محتوى في حد مباشر $K \neq M$ للمودول M.

معلومات التمويل :

هذا البحث ممول من جامعة دمشق وفق رقم التمويل (501100020595).

المـراجع العلميـة.

[1] – Abyzov، A. and Quynh، T. and Nhan، T.، " Modules Closed to $SSP-$and $SIP-$Modules ", Laobachevskii Journal of Mathematics., Vol. 38. No. 1, (2017), p. 16 – 23.

[2] – Abyzov, A. and Quynh, T. and Nhan, T., " $SSP-$Rings and Modules ", Asian-European Journal of Mathematics., Vol. 9. No. 1, (2016), p. 1 – 9.

[3] – Abyzov, A. H., and Tuganbaev, A.A., " Modules in which sums or intersections of two direct summands are direct summands ", J. Math. Sciences. Vol. 211, No. 3, (2015), p. 297 – 303.

[4] – Hamza, H., " I_0-Rings and I_0-Modules ", Math. J. Okayama Univ. 40 (1998) , p. 91–97 .[2000].

[5] – Derya, K. and Rachid, T., " A Note on Endomorphism Rings of Semi-Projective Modules ", Math. Proc. Royal Irish Academy. 112A, No, 2, (2012), p. 93 – 99.

[6] – Ding, N. and Ibrahim, Y. and Mohamed, Y., " C_4-Modules ", Comm-unications in Algebra. Vol. 45, No. 4, (2017), p. 1727 – 1740.

[7] – Tuganbaev, A. A., " Rings Closed to Regular ", Kluwer 2002.

[8] Ware, R., " Endomorphism Rings of Projective Modules ", Trans. Amer. Math. Soc. 155, p. 233 – 256. (1971).