حلقة برفير والحلقة الحسابية

محمد عمر عيطه* **د. شوقي الراشد****

الملخص

في هذه الورقة العلمية عُرضت دراسة لحلقة برفير ووضعت الشروط الواجب تطبيقها حتى تكون حلقة الخارج لها هي حلقة حسابية، وذلك بواسطة المبرهنة (1.3) وكنتيجة عن هذه المبرهنة إذا كانت R منطقة برفير عندئذٍ حلقة الخارج لها هي حلقة حسابية.

كما أنه وضع توصيف جديد للحلقة الحسابية في حال كانت مختزلة، وذلك بواسطة المبرهنة (4.3) والنتيجة (7.3) وكتابة الحلقة النوثرية كجداء ديكارتي منتهٍ لحلقات نوثرية كل منها يحوي مثالي أولي أصغري وحيد ضمن شروط معينة، وذلك بواسطة المبرهنة (8.3)، وهو تعميم لكون الحلقة الآرتينية تكتب كجداء ديكارتي منتهٍ لحلقات آرتينية محلية، ومن ثم كتابة الحلقة الحسابية والنوثرية كجداء ديكارتي منته لحلقات حسابية ونوثرية كل منها يحوي مثالي أولي أصغري وحيد كما في النتيجة (11.3) وإيجاد معيار يساعدنا في اختبار حلقة ما أنها ليست حلقة حسابية كما في النتيجة (5.3).

الكلمات المفتاحية: حلقة برفير، الحلقة الحسابية، منطقة برفير، الحلقة المختزلة، الحلقة الآرتينية، الحلقة النوثرية.

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 13F05, 13B30, 13E05, 13E10.

---

* طالب ماجستير، قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق.

** أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة Arab International UniversityAIU، عضو هيئة تدريسية، قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق.

Prüfer ring and Arithmetical ring

Mohammad Omar Aita* **Dr. Shawki Al-Rashed****

Abstract

In this paper, it was presented a study of Prüfer ring and what conditions should be applied for the quotient ring to be an Arithmetical ring through the theorem (1.3), as a result of this theorem if R is Prüfer domain, then the quotient ring is an Arithmetical ring.

New descriptions of Arithmetical ring in case it was reduced have also developed through the theorem (4.3) and result (7.3) and a Noetherian ring is a finite direct product of Noetherian rings each of them contains a unique minimal prime ideal within certain conditions through the theorem (8.3), it is a generalization that an Artin ring is a finite direct product of Artin local rings and then an Arithmetical Noetherian ring is a finite direct product of Arithmetical Noetherian rings each of them contains a unique minimal prime ideal as in the result (11.3).

Finding a criterion helps us to test a ring is not an Arithmetical ring as the result (5.3).

Keywords: Prüfer ring, Arithmetical ring, Prüfer domain, reduced ring, Artin ring, Noetherian ring.

MSC2020 – Mathematics Subject Classification System: 13F05, 13B30, 13E05, 13E10.

* Master student, Department of Mathematics - Faculty of Sciences - Damascus University.

** Associate Professor at Arab International University, Academic Staff at Damascus University.

مقدمة:

إن أول ظهور لمنطقة برفير يعود للعالم $Prüfer$ عام 1932، وهو تعميم لمفهوم مناطق ديدكند؛ إذ إن منطقة برفير هي منطقة ديدكند وليست نوثرية، وقد وضع أول شرط لمنطقة برفير المعرف في الحلقات العامة من قبل العالم $Fuchs$ [3]، والذي يعد تعريفًا للحلقة الحسابية وذلك عام 1949.

وهناك شروط أُخرى لمناطق برفير في الحلقات العامة منها: الحلقات ذات بعد شامل ضعيف أصغر أو يساوي الواحد، والحلقات نصف الوراثية، والحلقات الغاوسية، وحلقات برفير بشكل محلي، كما تم تعميم فكرة منطقة برفير في أوسع معانيها، وهي التي يطلق عليها اسم حلقة برفير من قبل $Griffin$ عام 1970 [7].

وتكمن أهمية مثل هذه الحلقات في دراسة الحلقات التبديلية في عرض إجابة السؤال التالي:
إذا كانت الخاصة X محققة لأجل المناطق التكاملية ما أفضل الطرق التي يمكن بواسطتها تمديد الخاصة X لأجل حلقات تحوي قواسم للصفر.

إن الدراسة في هذا البحث هي دراسة الحلقات الواحدية التبديلية، وبناءً على ذلك إن المقصود في الحلقة هو الحلقة الواحدية التبديلية ما لم يذكر خلاف ذلك صراحةً.

1. <u>تعاريف ومفاهيم أساسية في الجبر</u>:

1.1 تعريف ([1]، [2]): لتكن R حلقة، وليكن $x \in R$ نقول عن x إنه قاسم للصفر إذا وجد $0 \neq y \in R$ بحيث أن $x.y = 0$.

2.1 تعريف ([1]، [2]): نقول عن حلقة إنها منطقة تكاملية، إذا لم تحوِ قواسم صفرية مغايرة للصفر.

3.1 تعريف [9]: لتكن R حلقة، وليكن $x \in R$ نقول عن x إنه نظامي، إذا لم يكن قاسمًا للصفر.

4.1 تعريف [9]: لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R نقول عن I إنه مثالي نظامي، إذا حوى على عنصر نظامي.

5.1 تعريف ([1]، [2]): لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

– نقول عن المجموعة $\phi \neq S \subset R$ إنها مغلقة ضربيًا، إذا وفقط إذا تحقق:

$$\forall s_1, s_2 \in S: s_1.s_2 \in S \wedge 1 \in S$$

– لتكن S مجموعة مغلقة ضربيًا في R ولنعرف علاقة التكافؤ $\sim$ على الجداء الديكارتي $(R \times S)$ بالشكل:

$$\forall (r,s),(r',s') \in R \times S: (r,s) \sim (r',s') \Leftrightarrow \exists u \in S: u(rs' - sr') = 0$$

ونرمز لصفوف التكافؤ بالرمز $\left[\frac{r}{s}\right] = \{(r',s') \in R \times S: (r,s) \sim (r',s')\}$ واختصارًا $\frac{r}{s}$.

ونرمز لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز $S^{-1}R$ أي أن $S^{-1}R = \frac{R \times S}{\sim}$

نعرف على مجموعة صفوف التكافؤ $S^{-1}R$ قانوني تشكيل داخليين:

$$\forall (r_1,s_1),(r_2,s_2) \in R \times S: \left[\frac{r_1}{s_1}\right] + \left[\frac{r_2}{s_2}\right] = \left[\frac{r_1.s_2 + r_2.s_1}{s_1.s_2}\right] \wedge \left[\frac{r_1}{s_1}\right].\left[\frac{r_2}{s_2}\right] = \left[\frac{r_1.r_2}{s_1.s_2}\right]$$

عندئذ تكون $(S^{-1}R,+,.)$ حلقة تبديلية واحدية الحيادي فيها هو $\frac{1}{1} = 1$.

وفي حالة $S = R\backslash P$ حيث $P \in Spec(R)$ مثالي أولي في R فإن الحلقة $S^{-1}R = \left\{\frac{a}{b}; a \in R, b \notin P\right\}$ تسمى حلقة التموضع لـ R عند المثالي الأولي P، ويرمز لها بالرمز R_P.

6.1 تعريف ([1]، [2]): ليكن $f: A \longrightarrow B$ تشاكل حلقي، وليكن I مثالي في A نعرف ممدد المثالي I بأنه المثالي في B المولد بـ $f(I)$ ونرمز له بـ I^e. إذا كان J مثالي في B فإن $f^{-1}(J)$ هو مثالي في A ندعوه تقليص المثالي J ونرمز له بـ J^c.

7.1 تعريف[2]: لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R عندئذ نقول عن I إنه عديم قوى، إذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث $I^n = <0>$.

8.1 تعريف ([2]، [5]): لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R عندئذٍ: $\sqrt{I} = \{a \in R; \exists n \in \mathbb{N}; a^n \in I\}$ ونقول عن مثالي أنه جذري إذا كان $\sqrt{I} = I$.

9.1 تعريف ([2]، [5]): لتكن R حلقة عندئذ المثالي $\sqrt{0} = \{a \in R; \exists n \in \mathbb{N}; a^n = 0\}$ يدعى بالجذر الأساسي، ونرمز له بـ $N(R)$ ونقول عن الحلقة إنها مختزلة إذا كان المثالي الصفري هو مثالي جذري.

10.1 تعريف [6]: لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R نرمز بـ $Q(R) = \{\frac{a}{b}; a, b \in$ $b\}$ ليس قاسم للصفر $R;$ لحلقة القسمة لـ R وبـ $I^{-1} = \{r \in Q(R); rI \subset R\}$ لمقلوب I ونقول عن I أنه قابل للقلب إذا كان $I.I^{-1} = R$.

11.1 تعريف [8]: نقول عن منطقة R إنها منطقة برفير إذا كان كل مثالي غير صفري ومنتهي التوليد في R قابل للقلب.

12.1 تعريف ([7]، [8]): نقول عن حلقة R إنها حلقة برفير إذا كان كل مثالي نظامي ومنتهي التوليد قابل للقلب.

13.1 تعريف [8]: نقول عن منطقة تكاملية V إنها حلقة تقييم إذا تحقق الشرط التالي:

أيًا كان المثاليان I, J من V عندئذ إما $I \subset J$ أو $J \subset I$.

14.1 تعريف ([3]، [6]): نقول عن حلقة R إنها حلقة حسابية إذا كانت المثاليات في R_μ مرتبة كليًا بالنسبة لعلاقة الاحتواء، وذلك أيًا كان المثالي الأعظمي μ في R.

15.1 تعريف ([1]، [2]): نقول عن الحلقة R إنها نوثرية إذا تحقق الشرط التالي:

لأجل أي سلسلة متزايدة من المثاليات فيR بالشكل $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m \subseteq \cdots$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $I_n = I_k$ وذلك أيًا كان $k \geq n$.

16.1 تعريف ([1]، [2]): نقول عن الحلقة R إنها آرتينية إذا تحقق الشرط التالي:

لأجل أي سلسلة متناقصة من المثاليات فيR بالشكل $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_m \supseteq \cdots$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $I_n = I_k$ وذلك أيًا كان $k \geq n$.

17.1 تعريف [4]: لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R نقول عن I إنه مثالي رئيسي بشكل محلي إذا كان I_μ مثالي رئيسي لأجل أي مثالي أعظمي μ في R.

18.1 تعريف [8]: لتكن R حلقة جزئية منR' ولتكن $a \in R'$. نقول عن a إنه عنصر جبري على R إذا وجدت حدودية واحدية غير صفرية مثل $f(x) \in R[x]$ بحيث $f(a) = 0$. ونقول عنR' إنها تمديد جبري لـ R إذا كان كل عنصر منR' جبري على R.

19.1 تعريف[8]: لتكن R حلقة جزئية من R' نقول عن R إنها مغلقة جبريًا على R' إذا كانت عناصر R هي العناصر الوحيدة من R' الجبرية فوق R. ونقول عن R إنها مغلقة جبريًا إذا كانت R مغلقة جبريًا على حلقة القسمة $Q(R)$.

2. تمهيديات ومبرهنات أساسية:

1.2 مبرهنة [9]: لتكن R حلقة القضايا التالية متكافئة:

(a) إن R هي حلقة برفير.

(b) أيًا كان A, B, C مثاليات في R بحيث A نظامي و منتهي التوليد، $AB = AC$ فإن $B = C$.

(c) إن R مغلقة جبريًا، أيًا كان $a, b \in R$ بحيث أحدهما على الأقل نظامي فإن $< a, b >^2 = < a^2, b^2 >$.

(d) أيًا كان μ مثالي أعظمي في R و A, B مثاليات في R بحيث A نظامي فإن إما $A_\mu \subset B_\mu$ أو $B_\mu \subset A_\mu$.

(e) كل حلقة بين R و $Q(R)$ تكون مغلقة جبريًا.

2.2 مبرهنة [9]: إذا كانت R حلقة برفير و P مثالي أولي في R ويحقق إما P نظامي أو أعظمي بالنسبة لاحتوائه القواسم الصفرية فإن $R/_P$ منطقة برفير.

3.2 مبرهنة [8]: لتكن R منطقة تكاملية، عندئذ:

R هي منطقة برفير إذا وفقط إذا كانت R_P حلقة تقييم، وذلك أيًا كان المثالي الأعظمي P من R.

4.2 مبرهنة([1]، [2]): لتكن R حلقة، ولتكن S مجموعة مغلقة ضربيًا في R ولنأخذ التشاكل الطبيعي $f: R \longrightarrow S^{-1}R$ المعرف بالشكل $f(r) := \frac{r}{1}$ وليكن I مثالي في R عندئذ $I^e = S^{-1}I$ ويحقق الخاصة التالية إذا كان I مثالي أولي في R و يحقق $I \cap S = \emptyset$ ، فإن $I^{ec} = I$.

5.2 مبرهنة [11]: لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R، ولنأخذ $\pi: R \longrightarrow R/_I$ تشاكل الغمر القانوني عندئذ $S^{-1}I \trianglelefteq S^{-1}R$ و $\pi(S) \subseteq R/_I$ مجموعة مغلقة ضربيًا وأكثر من ذلك $S^{-1}R/_{S^{-1}I} \cong \pi(S)^{-1}(R/_I)$.

6.2 نتيجة[11]: لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R عندئذ $R_P/I_P \cong (R/I)_{P/I}$ بحيث $P \in$ $.Spec(R)$

7.2 مبرهنة[6]: نقول عن حلقة R إنها حسابية إذا وفقط إذا كان كل مثالي منتهي التوليد في R هو مثالي رئيسي بشكل محلي.

8.2 مبرهنة (هلبرت الأساسية) ([1]، [2]):

- إذا كانت R نوثرية فإن $R[x]$ نوثرية.
- إذا كانت R نوثرية فإن $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$ نوثرية.

9.2 مبرهنة [2]: لتكن R حلقة وليكن I مثالي في R، إذا كانت R نوثرية فإن R/I نوثرية.

10.2 مبرهنة ([1]، [2]): إذا كانت R حلقة نوثرية فإن الجذر الأساسي $N(R)$ يكون عديم قوى.

11.2 مبرهنة (الباقي الصينية) ([1]، [2]):

لتكن R حلقة تبديلية واحدية و $I_1, I_2, \dots, I_n$ مثاليات في R و φ تشاكل حلقي معرف بالشكل

$$\varphi: R \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} R/I_i$$

$$r \longmapsto (\overline{r_1}, \overline{r_2}, \dots, \overline{r_n}); \overline{r_i} = r + I_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

عندئذ القضايا التالية محققة:

1) إذا كانت I_i مثاليات أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن $\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

2) إن φ غامر $\Leftrightarrow$ I_i أولية فيما بينهما مثنى مثنى.

3) $ker\varphi = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

12.2 مبرهنة (بنية الحلقة الآرتينية) ([1]، [2]):

كل حلقة آرتينية تكتب كجداء ديكارتي منتهٍ لحلقات آرتينية محلية.

3. النتائج:

نعرض فيما يلي الشروط الواجب تطبيقها حتى تكون حلقة الخارج لحلقة برفير هي حلقة حسابية.

1.3 مبرهنة: لتكن R حلقة برفير وليكن I مثالي في R بحيث إما I نظامي أو أعظمي بالنسبة لاحتوائه القواسم الصفرية عندئذ $R/_I$ حلقة حسابية.

البرهان:

يكفي أن نبرهن أن حلقة تموضع $R/_I$ عند أي مثالي أعظمي مرتبة كليًا، وذلك حسب تعريف الحلقة الحسابية ليكن $\mu/_I$ مثالي أعظمي في $R/_I$ ولنبرهن أن $(R/_I)_{\mu/_I}$ مرتبة كليًا أي لنبرهن أيًا كان $(A/_I)_{\mu/_I}$، $(B/_I)_{\mu/_I}$ مثاليان في $(R/_I)_{\mu/_I}$ فإن أحدهما محتوى في الآخر، نلاحظ أن $I \subset A, B \subset \mu$

نميز حالتين – إذا كان $A = I$ أو $B = I$ يتم المطلوب

–$I \subsetneq A, B \subset \mu$ عندئذ A, B نظاميان. وبما أن R حلقة برفير حسب المبرهنة 1.2 إما $A_\mu \subset B_\mu$ أو $A_\mu \subset B_\mu$ وبالتالي إما $A_\mu/_{I_\mu} \subset B_\mu/_{I_\mu}$ أو $B_\mu/_{I_\mu} \subset A_\mu/_{I_\mu}$ ومنه إما $(A/_I)_{\mu/_I} \subset (B/_I)_{\mu/_I}$ أو $(B/_I)_{\mu/_I} \subset (A/_I)_{\mu/_I}$ مما سبق نجد أن R حلقة حسابية.

❖ من أجل $I = P$ تنتج المبرهنة (2.2)

ويمكن الاعتماد على المبرهنة السابقة (1.3) من أجل أن نبين أن حلقة الخارج لأي منطقة برفير هي حلقة حسابية.

2.3 نتيجة: إذا كانت R منطقة برفير فإن $R/_I$ حلقة حسابية.

البرهان:

إذا كان $I = 0$ عندئذ I أعظمي بالنسبة لاحتوائه القواسم الصفرية.

إذا كان $I \neq 0$ عندئذ I نظامي، فحسب المبرهنة السابقة $R/_I$ حلقة حسابية.

3.3 مبرهنة[9][1]: لتكن R حلقة مختزلة، إذا كان كل مثالي أعظمي يحوي مثالي أولي أصغري وحيد وليكن P من أجله $R/_P$ منطقة برفير فإن R حلقة حسابية.

[1] تم عرض الإثبات بشكل موسع، وذلك من أجل الاستفادة منه في المبرهنة (4.3) التالية، والتي هي الهدف والنتيجة.

البرهان:

ليكن μ مثالي أعظمي في R يحوي مثالي أولي أصغري وحيد وليكن P ولنأخذ تشاكل الغمر القانوني $\varphi: R_\mu \longrightarrow {R_\mu}/{P_\mu} \cong ({R}/{P})_{\mu/P}$ المعرف بالشكل $\varphi(x) = x + P_\mu$ وأكثر من ذلك $ker\varphi = P_\mu$ وبما أنه يوجد تقابل بين المثاليات الأولية في R_μ والمثاليات الأولية في R والمحتواة في μ فإن R_μ تحوي مثالي أولي أصغري وحيد هو P_μ وبما أن $N(R_\mu) = \bigcap_{Q_\mu \in Spec(R_\mu)} Q_\mu$ فإن $N(R_\mu) = P_\mu = ker\varphi$ ولما كانت R حلقة مختزلة فإن R_μ حلقة مختزلة وبالتالي $N(R_\mu) = 0$ ومنه $ker\varphi = 0$ مما سبق نجد أن $R_\mu \cong ({R}/{P})_{\mu/P}$ وبما أن ${R}/{P}$ هي منطقة برفير فحلقة تموضعها عند أي مثالي أعظمي مرتبة كليًا (منطقة تقييم) حسب المبرهنة (3.2) وبالتالي R حلقة حسابية.

❖ في المبرهنة التالية نضع توصيفًا للحلقة الحسابية من أجل الحلقات المختزلة.

4.3 مبرهنة: لتكن R حلقة مختزلة، إن القضيتين التاليتين متكافئتان:

1) R حلقة حسابية.

2) كل مثالي أعظمي يحوي مثالي أولي أصغري وحيد P وتكون من أجله ${R}/{P}$ هي منطقة برفير.

البرهان:

(1 $\Leftarrow$ 2) ليكن μ مثالي أعظمي في R ولنأخذ المجموعة $\sum = \{P \in spec(R); P \subset \mu\}$ إن $\sum \neq \phi$ لأن $\mu \in \sum$، نلاحظ أن $(\sum , \subset)$ مجموعة مرتبة جزئيًا، ولتكن $P_1 \supset P_2 \supset \cdots$ سلسلة متناقصة من عناصر $\sum$ ولنبرهن أن $P = \bigcap_{i \geq 1} P_i$ حد أدنى لعناصر السلسلة في $\sum$ نلاحظ أن $P = \bigcap_{i \geq 1} P_i$ مثالي كونه تقاطع مثاليات، وهو أولي بسبب علاقة الاحتواء فحسب تمهيدية زورن يوجد عنصر أصغري في $\sum$، (برهان الوحدانية) لنفرض جدلًا أنه يوجد عنصران أصغريان P', P'' بحيث $P' \neq P''$ وبما أن R حسابية فإنه إما $P'_\mu \subset P''_\mu$ أو $P''_\mu \subset P'_\mu$ ومنه إما $P' = (P'_\mu)^C \subset (P''_\mu)^C = P''$ أو $P'' = (P''_\mu)^C \subset (P'_\mu)^C = P'$

وهذا تناقض ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي أن $P' = P''$ ، وبالتالي يوجد عنصر أصغري وحيد في $\sum$ وليكن P وبما أن R حسابية فإن $R/_I$ حسابية (وضوحًا) وبالتالي $R/_P$ منطقة برفير.

$(2 \Leftarrow 1)$ محقق حسب المبرهنة السابقة.

كما يمكن صياغة المبرهنة السابقة بالشكل: لتكن R حلقة مختزلة، إن القضيتين التاليتين متكافئتان:

1) R حلقة حسابية.

2) كل مثالي أعظمي يحوي مثالي أولي أصغري وحيد P وتكون من أجله $R/_P$ هي حسابية.

مما سبق نجد أنه في الحلقة الحسابية كل مثالي أعظمي يحوي مثالي أولي أصغري وحيد.

5.3 خاصة: إذا كانت R حلقة حسابية فإن أي مثاليين أوليين أصغريين فيها هما أوليان فيما بينهما.

البرهان: ليكن P_1, P_2 مثاليين أوليين أصغريين فيR ولنفرض جدلًا أن P_1, P_2 ليسا أوليان فيما بينهما عندئذ $P_1 + P_2 \neq R$ وبالتالي يوجد مثالي أعظمي μ بحيث $P_1 + P_2 \subset \mu$ ومنه $P_1, P_2 \subset \mu$ وهذا يناقض كون R حسابية (كل مثالي أعظمي يحوي مثالي أولي أصغري وحيد) ومنه الفرض الجدلي خاطئ أي P_1, P_2 أوليان فيما بينهما.

مثال: لنأخذ $R = {}^{\mathbb{R}[x,y]}/_{< xy >}$

إن R حلقة ليست حسابية وذلك لأن $\overline{< xy >} = \overline{< x >} \cap \overline{< y >}$ ومنه المثاليات الأولية الأصغرية في R هي $\overline{< x >}, \overline{< y >}$ ولكن $< x > + < y > = < x, y > \neq R$.

6.3 خاصة:

كل مثالي أعظمي يحوي مثالي أولي أصغري وحيد إذا وفقط إذا المثاليات الأولية الأصغرية أولية فيما بينها.

البرهان: $\Longleftarrow$ البرهان كما في الخاصة السابقة.

$\Longrightarrow$ لنفرض أن المثاليات الأولية الأصغرية أولية فيما بينها، ولنفرض جدلًا أنه يوجد مثالي أعظمي μ يحوي مثاليين أوليين أصغريين P_1, P_2 ، وبما أن كل مثاليين أوليين أصغريين هما أوليان فيما بينهما فيكون $P_1 + P_2 = R \subset \mu$ وهذا تناقض ومنه الفرض الجدلي خاطئ من ثمّ كل مثالي أعظمي يحوي مثالي أولي أصغري وحيد.

❖ نقدم توصيفًا آخر للحلقة الحسابية في حال كانت مختزلة، من خلال النتيجة الآتية:

7.3 نتيجة: نقول عن حلقة مختزلة R إنها حسابية إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) المثاليات الأولية الأصغرية أولية فيما بينها.

2) أيًا كان المثالي الأولي الأصغري P من R فإن $R/_{P}$ هي منطقة برفير.

البرهان: حسب المبرهنة (4.3) والخاصة السابقة يتم المطلوب.

مثال: لنأخذ $R = \mathbb{R}[x,y]/_{< xy, y^2 - y >}$

نلاحظ أن

$$< xy, y^2 - y > = < xy, y(y-1) > = < xy, y > \cap < xy, y-1 >$$
$$= < y > \cap < x, y-1 >$$

ومنه R حلقة مختزلة لأن

$$\sqrt{< xy, y^2 - y >} = \sqrt{< y > \cap < x, y-1 >}$$
$$= \sqrt{< y >} \cap \sqrt{< x, y-1 >}$$
$$= < y > \cap < x, y-1 > = < xy, y^2 - y >$$

مما سبق نجد أن المثاليات الأولية الأصغرية في R هي $\overline{< y >}, \overline{< x, y-1 >}$

وهي أولية فيما بينها لأن $R = \overline{< y >} + \overline{< x, y-1 >}$ كما أن

$$R/_{\overline{< y >}} = \frac{\mathbb{R}[x,y]/_{< xy, y^2 - y >}}{< y >/_{< xy, y^2 - y >}} \cong \mathbb{R}[x,y]/_{< y >} \cong \mathbb{R}[x]$$

منطقة مثاليات رئيسية فهي منطقة برفير و

$$R/_{\overline{< x, y-1 >}} = \frac{\mathbb{R}[x,y]/_{< xy, y^2 - y >}}{< x, y-1 >/_{< xy, y^2 - y >}}$$
$$\cong \mathbb{R}[x,y]/_{< x, y-1 >} \cong \mathbb{R}$$

حقل فهي منطقة برفير، مما سبق نجد أن R حلقة حسابية.

– سنقوم بتعميم المبرهنة (12.2) لأجل الحلقات النوثرية.

8.3 مبرهنة: كل حلقة نوثرية تكتب كجداء ديكارتي منتهٍ لحلقات نوثرية كل منها يحوي مثالي أولي أصغري وحيد إذا تحقق الشرط التالي: أيًا كان المثاليان الأوليان الأصغريان من الحلقة فهما أوليان فيما بينهما.

البرهان: بما أن R حلقة نوثرية فإن عدد المثاليات الأولية الأصغرية منته، ولتكن $\{P_1, \dots, P_n\}$ وبما أن كل مثاليين أوليين أصغريين أوليان فيما بينهما أي $(R = P_i + P_j; i \neq j)$ وبما أن R نوثرية فإن $N(R)$ عديم قوى

$$\Longrightarrow \exists t \in \mathbb{N}; N(R)^t =< 0 >$$
$$\because R = P_i + P_j; i \neq j$$
$$\Longrightarrow R = P_i + P_j = \sqrt{P_i^t} + \sqrt{P_j^t} \subset \sqrt{P_i^t + P_j^t}$$
$$\because 1 \in R: 1 \in \sqrt{P_i^t + P_j^t}$$
$$\Longrightarrow \exists s \in \mathbb{N}; 1 = 1^s \in P_i^t + P_j^t$$
$$\Longrightarrow P_i^t + P_j^t = R; i \neq j$$

ومنه حسب مبرهنة الباقي الصينية فإن $\varphi: R \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} R/_{P_i^t}$ تشاكل غامر

ومنه حسب مبرهنة التماثل الأولى $R/_{ker\varphi} \cong Im\varphi = \prod_{i=1}^{n} R/_{P_i^t}$

$$\because R = P_i^t + P_j^t \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} P_i^t = \prod_{i=1}^{n} P_i^t$$

وذلك حسب مبرهنة الباقي الصينية كما تبين لنا أن

$$ker\varphi = \bigcap_{i=1}^{n} P_i^t = \prod_{i=1}^{n} P_i^t = \left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)^t \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right)^t = N(R)^t =< 0 >$$

مما سبق نجد أن $R \cong \prod_{i=1}^{n} R/_{P_i^t}$.

مثال : لنأخذ $R = \mathbb{R}[x, y]/_{< x^2, y^2 - y >}$

واضح أن R حلقة نوثرية ونلاحظ أن $< x^2, y^2 - y >=< x^2, y > \cap < x^2, y - 1 >$
ومنه المثاليات الأولية الأصغرية في R هي فقط $\overline{< x, y >}, \overline{< x, y - 1 >}$ وبالتالي
$N(R) = \overline{< x, y >} \cap \overline{< x, y - 1 >} = \overline{< x, y^2 - y >} \neq \overline{< 0 >}$
ولكن $\left(N(R)\right)^2 = \overline{< 0 >}$ ومنه حسب المبرهنة السابقة نجد أن

$$R \cong R/_{\overline{< x, y >}^2} \times R/_{\overline{< x, y - 1 >}^2}$$
$$\cong R/_{\overline{< x^2, xy, y^2 >}} \times R/_{\overline{< x^2, xy - x, y^2 - 2y + 1 >}}$$
$$\cong \mathbb{R}[x, y]\Big/_{< x^2, y >} \times \mathbb{R}[x, y]\Big/_{< x^2, y - 1 >}$$
$$\cong \mathbb{R}[x]/_{< x^2 >} \times \mathbb{R}[x]/_{< x^2 >}$$

9.3 نتيجة[10][1]: الجداء الديكارتي المنتهي لحلقات حسابية هو حلقة حسابية.

البرهان: لتكن $R_1, R_2, \dots, R_n$ حلقات حسابية ولنبرهن أن $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ حلقة حسابية
نعلم أن شكل المثاليات الأعظمية في $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ هو $R_1 \times R_2 \times \dots \times \mu_i \times \dots \times R_n$ حيث μ_i هو مثالي أعظمي في R_i وأكثر من ذلك $(R_1 \times R_2 \times \dots \times R_i \times \dots \times R_n)_{R_1 \times R_2 \times \dots \times \mu_i \times \dots \times R_n} \cong R_{i_{\mu_i}}$ وبما أن R_i هي حلقة حسابية فحلقة تموضعها عند أي مثالي أعظمي مرتبة كليًا ومنه $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ حلقة حسابية.

مثال : لنأخذ $R = \mathbb{R}[x, y]\Big/_{< x^2, y^2 - y >}$

من المثال السابق وجدنا أن $R \cong \mathbb{R}[x]/_{< x^2 >} \times \mathbb{R}[x]/_{< x^2 >}$ وبما أن $\mathbb{R}[x]/_{< x^2 >}$ هي حلقة مثاليات رئيسية فإن كل مثالي فيها هو مثالي رئيسي بشكل محلي وبالتالي $\mathbb{R}[x]/_{< x^2 >}$ هي حلقة حسابية وبما أن R تكتب كجداء لحلقات حسابية فإن R هي حلقة حسابية وذلك حسب النتيجة السابقة.

[1] المرجع باللغة الفرنسية، فقد تم عرض الإثبات كي يكون واضحًا من أجل الاستفادة منه في نتائج أخرى، والنتيجة بحد ذاتها ليست هدف دراسة البحث.

10.3 نتيجة[10][1]: لتكن R حلقة حسابية و $R = R_1 \times R_2$ عندئذ كل من R_1, R_2 حلقة حسابية.

البرهان: أيًا كان μ مثالي أعظمي في R_1 عندئذ $\mu \times R_2$ مثالي أعظمي في $R = R_1 \times R_2$ ولكن $R_{1\mu} \cong (R_1 \times R_2)_{\mu \times R_2}$ وبما أن R حلقة حسابية فحلقة تموضعها عند أي مثالي أعظمي مرتبة كليًا، ومنه R_1 حلقة حسابية بأسلوب مشابه نجد أن R_2 حلقة حسابية.

11.3 نتيجة: إذا كانت R حلقة نوثرية وحسابية فهي تكتب كجداء ديكارتي منتهٍ لحلقات نوثرية وحسابية كل منها يحوي مثالي أولي أصغري وحيد.

البرهان: بما أن R حلقة حسابية فإن أي مثاليين أوليين أصغريين فيها هما أوليان فيما بينهما، وبما أن R حلقة نوثرية فهي تكتب كجداء ديكارتي لحلقات نوثرية كل منها يحوي مثالي أولي أصغري وحيد و بما أن R حسابية وتكتب كجداء ديكارتي لحلقات نوثرية كل منها يحوي مثالي أولي أصغري وحيد فحسب النتيجة السابقة فإن R تكتب كجداء ديكارتي لحلقات نوثرية وحسابية كل منها يحوي مثالي أولي أصغري وحيد.

[1] المرجع باللغة الفرنسية، فقد تم عرض الإثبات كي يكون واضحًا من أجل الاستفادة منه في نتائج أخرى (النتيجة التالية (11.3))، والنتيجة بحد ذاتها ليست هدف دراسة البحث.

المراجع:

[1]Atiyah, M. F., and Macdonald, I. G., (1969). Introduction to commutative Algebra. Addition-Wesley.

[2] Al-Rashed, S., (2016/17). Class Note and lectures of Commutative Algebra Damascus Uni.

[3]Fuchs, L., (1949). Über die Ideale arithmetischer Ring, Commentarii Mathematici Helvetici, V. 23, pp. 334-341.

[4]Gabelli, S., (2013). Locally principal ideals and finite character, Societatea de Ştiinţe Matematice din România, V. 56 (104), No. 1, pp. 99-108.

[5]Gathmann, A., (2013/14). Commutative Algebra, Class Notes TU Kaiserslautern.

[6]Glaz, S., and Schwarz, R., (2011). Prüfer condition in commutative rings, Arabian journal for science and Engineering, V. 36, No. 6, pp. 967-983.

[7]Griffin, M., (1970). Prüfer ring with zero-divisors, Für die reine und angewandte Mathematik, V. 239/240, pp. 59-64.

[8]Larsen, M. D., and McCarthy, P. J., (1971). Multiplicative theory of ideal, Academic press New York and London, V. 43.

[9]Lucas, T. G., (1986). Some results on prüfer ring. Pacific journal of Mathematics, V. 124, No. 2, pp 333-343.

[10] Mohammed, O., and Najib, M., (2017). Les conditions de Prüfer dans les anneaux commutatifs, Université Sidi Mohamed ben abdellah Faculté des Sciences et Techniques de fes departement de mathematiques Mémoire de fin d'études.

[11]Silva, P. D., (2017). commutative algebra tome I elementary properties of rings and their modules.Freie Universität Berlin.