Damascus University Journal
for the Basic Sciences
Vol 39 No. 2 (2023): 142-130

مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 39- عدد 2 (2023): 130-142

التمثيل الثنوي لزمر لي منتهية البعد

أركان الخلف[1]، أ. م. د. عبد اللطيف هنانو[1]

[1] **قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – سورية.**

الملخص

تعتبرُ نظرية التمثيل من أهمّ مفاهيم الرياضيات التي تُسهل لنا دراسة البنى الجبرية المجردة، وذلك لما لها من تطبيقات عملية هامة خصوصاً في ميكانيكِ الكم، وعندما نقوم بتمثيل زمرة على فضاءٍ V فإنّنا نستبدلُ كل عنصر من عناصر الزمرة بمؤثرٍ خطي قلوب على هذا الفضاء أو بمصفوفة قلوبة.

هدفت هذه الورقة العلمية إلى دراسة التمثيل الثنوي لزمرةٍ لي (Lie) منتهية البعد على فضاءٍ متجهي منتهي البعد، حيث درسنا طبيعة التمثيلات الجزئية من التمثيل الثنوي وأثبتنا أنّه إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ فإنّ ρ_W^* ليس تمثيلاً جزئياً من ρ^* لكنّه يمدد إلى تمثيل جزئي من ρ^*، كما أثبتنا أنّه إذا كان التمثيل ρ خزولاً، خزولاً تماماً، وواحدياً فإنّ تمثيله الثنوي ρ^* سيكون خزولاً، خزولاً تماماً، وواحدياً، كما قمنا بإيجادِ حالاتٍ تكون فيها التمثيلات الثنوية

لزمرةِ لي متماثلة وذلك بالاعتماد على وزن ومميز التمثيل.

الكلمات المفتاحية: زمرة لي، تمثيل زمرة لي، التمثيل الثنوي.

التصنيف الرياضياتي العالمي (MSC 2020): 22E99 - 22E47 - 20C99

تاريخ الإيداع: 2022/01/31
تاريخ القبول: 2022/06/27

ISSN (online): 2789-6366
http://journal.damascusuniversity.edu.sy/index.php/index/index

Dual representation of finite dimensional Lie groups

Arkan Al-Khalaf[1] Dr. Abd Al-Latef Hanano[1]
[1]Department of mathematics – Faculty of science – Damascus University – Syria

Abstract
Representation theory considered as one of the most important concepts in mathematics that makes the study of algebraic structure easier, and it has important practical applications, especially in quantum mechanics, and When we represent a group on the space$V$, we replace each element with invertible operator or matrix.
The main purpose of this paper is to study the dual representation of finite dimensional Lie group on finite dimensional space, where we studied the sub representations of dual representation, thus we proved that if ρ_W is subrepresentation of ρ, then ρ_W^* is not subrepresentation of ρ^*, but we can extend it to subrepresentation.
We also proved that if ρ is reducible, completely reducible and unitary then ρ^* is reducible completely reducible, and unitary, and we found cases in which dual representations of Lie group are isomorphic with respect of the character,
and the weight of the representation.

Received :2022/01/31
Accepted:2022/06/27

Key words: Lie group, Lie group representation, Dual representation
Mathematical Subjects Classification (MSC 2020): 20C99 - 22E47 - 22E99

1. المتنوع التفاضلي:

1.1. تعريف [4]: ليكن (M,τ) فضاءً تبولوجياً هاوسدورفياً (Hausdorff)، يُقال عن M إنَّه متنوعٌ تبولوجي (Manifold) منتهي البعد، وبُعده n إذا كان لكل نقطة من M جواراً هوميومورفيزمياً مع مجموعةٍ مفتوحةٍ من R^n.

1.2. تعريف [4]: ليكن M متنوعاً تبولوجياً بُعده n، ولتكن U مجموعةً مفتوحةً في M هوميومورفيزمية مع مجموعةٍ مفتوحةٍ E في $\mathbb{R}^n$، وفق الهوميومورفيزم $\psi: U \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}^n$، عندئذٍ تُسمى الثنائية (ψ, U) جواراً إحداثياً في M، وأحياناً تُسمى بالخارطة $(Chart)$.

1.3. تعريف [4]: ليكن M متنوعاً تبولوجياً بُعده n ، ولتكن $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ تغطية لـ M ، حيث U_α مجموعة مفتوحة في M هوميومورفيزمية مع مجموعة مفتوحة E_α من $\mathbb{R}^n$ وفق الهوميومورفيزم $\psi_\alpha: U_\alpha \longrightarrow E_\alpha$، عندئذٍ تدعى الأسرة $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ جملة جوارات إحداثية لـ M أو الأطلس $(Atlas)$.

1.4. تعريف [4]: ليكن M متنوعاً تبولوجياً بُعده n، بفرض أنّ M يملك جملة جوارات إحداثية من الصف $C^r\,; 1 \le r \le \infty$، عندئذٍ M يُدعى متنوع تفاضلي (Differentiable Manifold) من الصف C^r.

1.5. تعريف [2]: ليكن $M, \grave{M}$ متنوعين تبولوجيين تفاضليين من الصفِ C^∞ بُعديهما على الترتيبِ n, m، وليكن $\varphi: M \longrightarrow \grave{M}$ تطبيقاً مستمراً، ولتكن $p \in M$، و f دالة من الصف C^∞ معرّفة على جوار V لـ $\varphi(p)$ في M .

بما أنّ φ تطبيق مستمر فإنّه يمكن أن نأخذ جوار U لـ p بحيث $\varphi(U) \subset V$ ، ولتكن الدالة $\varphi * f$ المعرفة على الجوار U بالشكل: $(\varphi * f)(q) = f\big(\varphi(q)\big)\,; q \in U$

إذا تحقق: من أجل أي دالة f من الصف C^∞ معرفة على جوار لـ $\varphi(p)$ تكون الدالة $\varphi * f$ من الصف C^∞ في جوار للنقطة p، عندئذ يُقال عن التطبيق φ إنّه من الصفِ C^∞ عند النقطة p أو قابل للمفاضلة عند النقطة p.

إذا كان φ قابلاً للمفاضلة عند كل نقطة من M، عندئذ يُقال عن φ إنّه قابل للمفاضلة.

2. زمرة لي:

2.1. تعريف [5]: يُقال عن المتنوع التبولوجي التفاضلي G، والذي بُعده n إنّه زمرة لي (Lie) منتهية البعد إذا كانت G زمرة وكان التطبيقان:

$$\begin{array}{ll} \mu: G \times G \longrightarrow G & \quad I: G \longrightarrow G \\ (x,y) \longrightarrow xy & \quad x \longrightarrow x^{-1} \end{array}$$

قابلين للتفاضل.

ويبرهن على أنّ $GL(n,F)$ زمرة المصفوفات المربعة القلوبة بمدخلات من الحقل F هي زمرة لي، كما أنّ $GL(V)$ زمرة المؤثرات الخطية القلوبة على الفضاء V هي زمرة لي.

2.2. تعريف [5]: ليكن $\mathfrak{g}$ فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقلِ F، مزوّداً بالتطبيق:

$$\begin{array}{c} [\cdot,\cdot]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ (X,Y) \longrightarrow [X,Y] \end{array}$$

يُقال عن $\mathfrak{g}$ إنّه جبر لي منتهي البعد على الحقل F إذا كان التطبيق $[\cdot,\cdot]$ ثنائي الخطية ومتناظر تخالفياً، ويحقق متطابقة جاكوبي $(Jacobi)$:

$$\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0$$

ويبرهن على أنّ كل زمرة لي تعين جبر لي موافق لها يربط بينهما تطبيق يُسمى التطبيق الأسي $exp: \mathfrak{g} \longrightarrow G$، وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها $G \subseteq GL(n,F)$ يعرّف التطبيق الأسي بالشكل:

$$\exp(X) = e^X \quad \forall\, X \in \mathfrak{g}.$$

2.3. تعريف [5]: لتكن G زمرة لي وليكن $V(F)$ فضاءً متجهياً منتهي البعد على الحقل F يعرّف التمثيل الخطي (Linear Representation) لزمرة لي على الفضاء V بأنّه التشاكل الزمري القابل للتفاضل:

$$\begin{aligned} \rho: G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longrightarrow \rho_g \end{aligned}$$

وبما أنّ $GL(V) \cong GL(n, F)$ فإنّه يمكن أن يُعرف تمثيل مصفوفي للزمرة G بالشكل:

$$\begin{aligned} \rho: G &\longrightarrow GL(n, F) \\ g &\longrightarrow [\rho_g] \end{aligned}$$

حيث $[\rho_g]$ هي مصفوفة ρ_g بالنسبة لقاعدة ما α للفضاء V.

2.4. تعريف [5]: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء $V(\mathrm{F})$، يعرّف التمثيل الثنوي لـ ρ بأنّه التشاكل الزمري القابل للتفاضل التالي:

$$\begin{aligned} \rho^*: G &\longrightarrow GL(V^*) \\ g &\longrightarrow \rho_{g^{-1}}^{tr}: V^* \longrightarrow V^* \end{aligned}$$

حيث $\rho_{g^{-1}}^{tr}(\varphi) = \varphi \circ \rho_{g^{-1}} \ \forall \ \varphi \in V^*$. أي أنّ كل تمثيل ρ لزمرة لي G على الفضاء V يعين تمثيلاً ثنوياً ρ^* على الفضاء V^* وتكون مصفوفة ρ^* بالنسبة لقاعدة α^* هي منقول مصفوفة $\rho_{g^{-1}}$ بالنسبة لقاعدة α للفضاء V، أي أنّ: $[\rho_g^*] = [\rho_{g^{-1}}]^T$.

2.5. تعريف [5]: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء $V(F)$، وليكن W فضاءً جزئياً من V، يُقال عن W إنّه G – فضاء جزئي من V إذا كان $\rho_g(W) \subseteq W \ \forall \ g \in G$، وفي هذه الحالة يمكن أن يُعين تمثيل ρ_W للزمرة G على الفضاء W يسمى تمثيلاً جزئياً من ρ.

ويقال عن ρ إنّه خزولٌ (Reducible) إذا كان يملك G – فضاء جزئي فعلي من V، وبخلاف ذلك يُقال عن ρ إنّه غير خزول (Irreducible).

كما يُقال عن ρ إنّه خزولٌ تماماً (Completely reducible) إذا تحقق: من أجل أي G – فضاء U جزئي من V يوجد G – فضاء جزئي من V وليكن W، بحيث $V = U \oplus W$، وبكلمةٍ ثانية يُقال عن ρ إنّه خزول تماماً إذا كُتِب على شكل مجموع مباشر لتمثيلات جزئية غير خزولة.

ويبرهن على أنّه إذا كان التمثيل غير خزول فإنّه خزول تماماً.

2.6. تمهيدية: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G منتهية البعد، ومنتهية التوليد على الفضاء $V(F)$، عندئذٍ ρ يتعين بشكل كامل بواسطة مولدات الزمرة G وقاعدة الفضاء $V(F)$.

الإثبات: لتكن $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ مولدات الزمرة G، و $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ قاعدة للفضاء V، عندئذٍ

بفرض أنّ $\rho_{g_i} \in GL(V) \ \forall \ i = 1,2, \dots, r$. $h \in G$، عندئذٍ:

$$h = g_1^{n_1} * g_2^{n_2} * \dots * g_j^{n_j} \ ; \ n_j \in Z \ , j \in \{1,2, \dots, r\}$$

كما أنّه من أجل كل $w \in V$ يكون $w = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \ ; \ c_i \in F$، وعليه يكون:

$$\begin{aligned} \rho_g(w) &= \rho_{g_1^{n_1} * g_2^{n_2} * \dots * g_j^{n_j}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right) \\ &= c_1 \left[\rho_{g_1^{n_1} * g_2^{n_2} * \dots * g_j^{n_j}}(v_1) \right] + \dots + c_n \left[\rho_{g_1^{n_1} * g_2^{n_2} * \dots * g_j^{n_j}}(v_n) \right] \end{aligned}$$

$$= c_1\left[\rho_{g_1^{n_1}}(v_1)\cdot \dots \cdot \rho_{g_j^{n_j}}(v_1)\right] + \dots + c_n\left[\rho_{g_1^{n_1}}(v_n)\cdot \dots \cdot \rho_{g_j^{n_j}}(v_n)\right]$$

وبذلك يتم المطلوب.

2.7. نتيجة: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G منتهية البعد، ومنتهية التوليد على الفضاء$V(F)$، عندئذٍ ρ^* يتعين بشكل كامل بواسطة مولدات الزمرة G وقاعدة الفضاء.$V(F)$ الإثبات:

يكون لدينا:

$$\forall\ v \in V , g \in G\ , \varphi \in V^*$$

$$\rho_g^*(v) = \left(\varphi \circ \rho_{g^{-1}}\right)(v) = \varphi\left(\rho_{g^{-1}}(v)\right)\ ;\ g^{-1} \in G$$

$$= \varphi\left(c_1\left[\rho_{g_1^{n_1}}(v_1)\cdot \dots \cdot \rho_{g_j^{n_j}}(v_1)\right] + \dots + c_n\left[\rho_{g_1^{n_1}}(v_n)\cdot \dots \cdot \rho_{g_j^{n_j}}(v_n)\right]\right)$$

$$= c_1\varphi\left(\rho_{g_1^{n_1}}(v_1)\cdot \dots \cdot \rho_{g_j^{n_j}}(v_1)\right) + \dots + c_n\varphi\left(\rho_{g_1^{n_1}}(v_1)\cdot \dots \cdot \rho_{g_j^{n_j}}(v_1)\right)$$

وبذلك يتم المطلوب.

إنّ التمهيدية والنتيجة السابقتان تدفعانا للتساؤل فيما إذا كان التمثيلانρ, ρ^* يتمتعان بالصفات ذاتها وهذا ما سنناقشه في هذه الورقة العلمية.

2.8. الفضاء الجزئي من الفضاء الثنوي [1]:

إذا كان V فضاءً متجهياً منتهي البعد وW فضاءً جزئياً من V فإنّ W^* ليس بالضرورة فضاءً جزئياً من V^* إلا أنّه يمكن تمديده إلى فضاء $\grave{W}$ جزئي من V^* ويبرهن على أنّه إذا كان W فضاءً جزئياً من V فإنّ:

$$W^{\circ} = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0\ \forall\ v \in W\}$$

فضاء جزئي منV^*، وأيضاً إذا كان N فضاءً جزئياً من V^* فإنّ:

$$N_{\circ} = \{v \in V : \varphi(v) = 0\ \forall\ \varphi \in N\}$$

فضاء جزئي من V.

2.9. مبرهنة : ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء $V(F)$ ذي البعد n ، تمثيله الثنوي ρ^*، وليكن ρ_W تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ، عندئذٍ ρ_W^* يمدد إلى تمثيل جزئي فعلي من ρ^*.

الإثبات: ليكن ρ_W تمثيلاً جزئياً فعلياً من ρ، عندئذٍ W هو $G-$ فضاء جزئي فعلي من V، و لتكن $\alpha = \{w_1, \dots, w_m\}$ قاعدة لـ W الذي فضاؤه الثنوي $W^* = \{\varphi : W \longrightarrow F\}$، عندئذٍ ρ_W^* هو التمثيل الثنوي لـρ_W ولكنّه ليس تمثيلاً جزئياً من ρ^*، وذلك باعتبار أنّ W^* ليس فضاءً جزئياً من V^*.

لنأخذ الفضاء $\grave{W} = \{\grave{\varphi} : V \longrightarrow F\}$ المعرّف بالشكل:

$$\grave{\varphi}(w_i) = \begin{cases} \varphi(w_i)\ ;\ i \le m \\ 0\ \ ; m+1 \le i \le n \end{cases}$$

والذي يمثل فضاء جزئياً من V^*، ولنبرهن على أن $\rho_g^*(\grave{W}) \subseteq \grave{W}$

$$\forall\ \grave{\varphi} \in \grave{W}\ , f \in V^* \quad \rho_g^*(\grave{\varphi})(w_i) = \left(f \circ \rho_{g^{-1}}\right)(\grave{\varphi}(w_i))$$

$$= \begin{cases} (f \circ \rho_{g^{-1}})(\varphi(w_i)) & ;\ i \le m \\ 0 & ;\ m+1 \le i \le n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(f_{|W} \circ \rho_W(g^{-1})\right)(\varphi(w_i))\ ; & i \le m \\ 0 & ; m+1 \le i \le n \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \underbrace{\rho_W^*\big(\varphi(w_i)\big)}_{\in W^*} & ; \ i \le m \\ 0 \ ; \ m+1 \le i \le n \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \varphi_1(w_i)\ ; i \le m \\ 0 \ ; \ m+1 \le i \le n \end{cases} \quad \in \grave{W}$$

مما سبق نجد أنّ $\grave{W}$ هو G–فضاء جزئي فعلي منV^*، أي أنّ $\rho_{\grave{W}}^*$ تمثيل جزئي من ρ^*.

2.10. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء V، عندئذٍ إذا كان ρ_W تمثيلاً جزئياً غير فعلي من ρ، فإنّ $\rho_{W^*}^*$ تمثيل جزئي من ρ^*.

الإثبات: إذا كان ρ_W تمثيل جزئي غير فعلي فإنّ W هو $G-$ فضاء جزئي غير فعلي، أي أن $W = V$ أو $W = \{0\}$، ومنه يكون $W^* = V^*$ أو $W^* = \{0\}$، وفي كلا الحالتين يكون $\rho_g^*(W^*) \subseteq W^*$، أي أنّ W^*هو $G-$ فضاء جزئي منV^*، وبذلك يتم المطلوب.

2.11. نتيجة: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء V، ρ^* تمثيله الثنوي، عندئذٍ إذا كان ρ غير خزول فإنّ ρ^* غير خزول.

الإثبات: ينتج من المبرهنتين $(2.9), (2.10)$.

2.12. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء $V(F)$، ρ^* تمثيله الثنوي، عندئذٍ ρ خزول إذا وفقط إذا كانρ^* خزول.

الإثبات: بفرض أنّ ρ خزول، عندئذٍ V يملك $G-$ فضاء جزئي فعلي وليكن W، وعليه W° هو فضاء جزئي فعلي من V^*، كما أنّ: $\forall\ w \in W , f \in W^\circ , g \in G$

$$\rho_g^*(f)(w) = \big(f \circ \rho_{g^{-1}}\big)(w)$$

$$= f\Big(\rho_{\grave{g}}(w)\Big) \ \ ; \ \ g^{-1} = \grave{g} \in G$$

$$= f(\grave{w}) = 0 \qquad ; \ \grave{w} \in W$$

إذن$\rho_g^*(f) \in W^\circ$، وV^* يملك $G-$ فضاء جزئي فعلي، أي أنّ ρ^* خزول.

الآن بفرض أنّ ρ^* خزول، عندئذٍ V^* يملك $G-$ فضاء جزئي فعلي وليكن N، وعليه يكون $N_\circ$ فضاء جزئي فعلي من V، ويكون:

$$\forall\ v \in N_\circ , f \in N , g \in G$$

$$f\Big(\rho_g(v)\Big) = \big(\rho_{\grave{g}}^* \circ f\big)(v) = \rho_{\grave{g}}^*\big(f(v)\big)$$

$$= \rho_{\grave{g}}^*(0) = 0$$

أي أنّ $\rho_g(v) \in N_\circ$، وVيملك $G-$ فضاء جزئي فعلي، إذن ρ خزول.

2.13. تعريف [5]: ليكن $V(\mathbb{C})$ فضاء هيلبرت (Hilbert)، وليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء $V(\mathbb{C})$، يُقال عن ρ إنّه واحدي (Unitary) إذا كانت المؤثرات $\rho_g\ \forall\ g \in G$ هي مؤثرات واحدية، أي أنّ:

$$\langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle = \langle v, w \rangle \ \ \forall\ g \in G$$

ويبرهن في [1] على أنّ المؤثر ρ_g يكون واحدياً إذا وفقط إذا كانت مصفوفته واحدية، وأنّه إذا كانت A مصفوفة واحدية فإنّ كلاً من A^T، A^{-1} هي مصفوفة واحدية.

كما يبرهن على أنّه إذا كان V فضاء جداء داخلي، فإنّ V^* فضاء جداء داخلي.

2.14. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً واحدياً لزمرة لي G على الفضاء $V(\mathbb{C})$، عندئذٍρ^* واحدي وخزول تماماً.

الإثبات: بما أنّ $V(\mathbb{C})$ فضاء متجهي منتهي البعد على الحقل C، فإنّه يمكن تزويد الفضاء V بجداء داخلي، فيكون V فضاء جداء داخلي منتهي البعد، وزد على ذلك أنّ كل فضاء جداء داخلي منتهي البعد هو فضاء هيلبرت لذلك يمكن تعريف تمثيل واحدي لزمرة لي على الفضاء $V(\mathbb{C})$.

إذا كان ρ تمثيلاً واحدياً فإنّ $\rho_g \ \forall\, g \in G$ هي مؤثرات واحدية تقابل مصفوفات واحدية $[\rho_g]$ بالنسبة لقاعدة متعامدة منظمة α للفضاء V، وعليه تكون كل من $[\rho_{g^{-1}}]$، $[\rho_{g^{-1}}]^T$ مصفوفة واحدية، وبالتالي $\rho_g^* \ \forall\, g \in G$هي مؤثرات واحدية، وبذلك يتم المطلوب.

لنبرهن الآن على أنّ ρ^* خزول تماماً.

إذا كان ρ^* غير خزول يتم المطلوب، بفرض أنّ ρ^* خزول، عندئذٍ ρ^* يملك G – فضاء جزئي فعلي منV^* وليكن U^*، حيث $\rho_g^*(U^*) \subseteq U^* \ \forall\, g \in G$، ولنأخذ المتمم العمودي ${U^*}^\perp$، ولنبرهن على أنّه $G-$ فضاء جزئي من V^*.

بما أنّ ρ_g^* واحدي، فإنّ:

$$\left(\rho_g^*\right)^* = (\rho_g^*)^{-1} = \rho_{g^{-1}}^*$$

حيث $\left(\rho_g^*\right)^*$ قرين المؤثر ρ_g^* .

ليكن $\varphi_1 \in {U^*}^\perp, \varphi_2 \in U^*$، عندئذٍ:

$$\begin{aligned} \langle \rho_g^*(\varphi_1), \varphi_2 \rangle &= \langle \varphi_1, \left(\rho_g^*\right)^*(\varphi_2) \rangle \\ &= \langle \varphi_1, \rho_{g^{-1}}^*(\varphi_2) \rangle = \langle \varphi_1, \acute{\varphi}_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

حيث$\rho_{g^{-1}}^*(\varphi_2) \in U^*$ لأنّ U^* هو $G-$ فضاء، مما سبق نجد أن $\rho_g^*(\varphi_1)$ يعامد أي عنصر$\varphi_2 \in U^*$، وعليه يكون $\rho_g^*(\varphi_1) \in {U^*}^\perp$، أي أنّ ${U^*}^\perp$ هو $G-$ فضاء جزئي من V^*، لكن $V^* = U^* \oplus {U^*}^\perp$، وبتطبيق ذلك من أجل كل $G-$ فضاء جزئي منV^* وبالاعتماد على كون V^* منتهي البعد يتم المطلوب.

3. زمرة لي المتراصة:

3.1. تعريف [2]: ليكن X فضاءً تبولوجياً، ولتكن$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ تغطية مفتوحة للفضاء X، يُقال عن X إنّه متراص (Compact) إذا وجد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in I$، بحيث أنّ:

$$X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_m}$$

ويُقال عن X إنّه مترابط (Connected) إذا لم يملك أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين $V\,, U$ تحققان:

$$X = U \cup V\,, U \cap V = \emptyset$$

كما أنّ زمرة لي تأخذُ صفة الفضاء التبولوجي الذي بُنيت عليه.

3.2. تعريف [3]: لتكن G زمرة لي المتراصة، عندئذٍ يوجد قياس وحيد dg على G يُدعى قياس $(Haar)$ يحقق:

$$\int_G dg = 1 \ \ \forall\ \ g \in G$$

وإذا كانت f دالة قابلة للتفاضل على G، فإنّ:

$$\int_G f(g)dg = \int_G f(gh)dg = \int_G f(hg)dg \ \ \forall\, g, h\ \in G$$

ويبرهن في [3] على أنّ كل تمثيل لزمرة لي المتراصة هو تمثيل خزول تماماً، وفيما يلي سنبرهن على أنّ كل تمثيل ثنوي لزمرة لي المتراصة هو تمثيل خزول تماماً.

3.3. مبرهنة: لتكن G زمرة لي المتراصة، عندئذٍ كل تمثيل ثنوي لـ G هو تمثيل خزول تماماً.

الإثبات: ليكن ρ تمثيلاً لـG على الفضاء $V(\mathbb{C})$، وليكن $\langle .,. \rangle$ جداء داخلي ما على الفضاء $V(\mathbb{C})$، ولنأخذ التطبيق $\langle .,. \rangle_G : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$، والمعرّف بالشكل:

$$\langle v,w \rangle_G = \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle dg \quad \forall\, v,w \in V\,, g \in G$$

لنبرهن أولاً على أنّ $\langle .,. \rangle_G$ جداء داخلي.

$$1\text{- } \langle \alpha v + \grave{v}, w \rangle_G = \int_G \langle \rho(g)(\alpha v + \grave{v}), \rho(g)(w) \rangle dg$$
$$= \alpha \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle dg + \int_G \langle \rho(g)(\grave{v}), \rho(g)(w) \rangle dg$$
$$= \alpha \langle v,w \rangle_G + \langle \grave{v}, w \rangle_G$$
$$2\text{- } \langle v, \alpha w + \grave{w} \rangle_G = \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(\alpha w + \grave{w}) \rangle dg$$
$$= \bar{\alpha} \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle dg + \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(\grave{w}) \rangle dg$$
$$= \bar{\alpha} \langle v,w \rangle_G + \langle v, \grave{w} \rangle_G$$
$$3\text{- } \langle v,w \rangle_G = \int_G \langle \rho(g)(v), \rho_g(w) \rangle dg = \int_G \overline{\langle \rho(g)(w), \rho_g(v) \rangle} dg$$
$$= \overline{\int_G \langle \rho(g)(w), \rho(g)(v) \rangle dg} = \overline{\langle w,v \rangle_G}$$
$$4\text{- } \langle v,v \rangle_G = \int_G \underbrace{\langle \rho(g)(v), \rho(g)(v) \rangle}_{\geq 0} dg \geq 0$$
$$5\text{-} \langle v,v \rangle_G = 0 \implies \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(v) \rangle dg = 0$$
$$\implies \rho_g(v) = 0 \implies v = 0$$

لنبرهن الآن على أنّ ρ واحدي بالنسبة لـ $\langle .,. \rangle_G$.

من أجل كل $h \in G$ يكون لدينا:

$$\langle \rho(h)(v), \rho(h)(w) \rangle_G = \int_G \langle \rho(g)\rho(h)(v), \rho(g)\rho(h)(w) \rangle dg$$
$$= \int_G \langle \rho(gh)(v), \rho(gh)(w) \rangle dg$$

وبما أنّ G متراصة، فإنّه وفقاً لقياس (Haar) يكون:

$$\langle \rho(h)(v), \rho(h)(w) \rangle_G = \int_G \langle \rho(g)(v), \rho(g)(w) \rangle dg$$
$$= \langle v,w \rangle_G$$

وحسب المبرهنة (2.14) يكون ρ^* خزول تماماً.

3.4. تعريف [5]: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي G على الفضاء $V(F)$، يُقال عن ρ إنّه مخلص (faithful) إذا كان التطبيق $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ متباين.

ويبرهن في [5] على أنّ كل زمرة لي متراصة تعين تمثيلاً مخلصاً منتهي البعد، وفيما يلي سنبرهن على أنّ كل زمرة لي متراصة تعيّن تمثيلاً ثنوياً مخلصاً.

3.5. مبرهنة: كل زمرة لي متراصة G تعين تمثيلاً ثنوياً مخلصاً.

الإثبات: بفرض أنّ ρ تمثيل مخلص للزمرة G على الفضاء $V(F)$، عندئذٍ التطبيق $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ متباين أي أنّ $\ker\rho = \{e\}$، وعليه يكون:

$$\rho_g \neq I_V \;\; \forall\;\; g \in G\,; g \neq e \;\; \text{و} \;\; \rho_e = I_V$$
$$[\rho_g] \neq I_n \; \forall\;\; g \in G\,; g \neq e \;\; \text{و} \;\; [\rho_e] = I_n$$

وبالتالي:

$$\left[\rho_{g^{-1}}\right]^T \neq I_n \ \forall\ g \in G\ ; g \neq e \ \text{و}\ [\rho_e]^T = I_n$$

$$\rho_g^* \neq I_V \ \forall\ g \in G\ ; g \neq e \ \text{و}\ \rho_e^* = I_V$$

ومنه $\ker\rho^* = \{e\}$، أي أنّ ρ^* مخلص.

4. التمثيلات المتماثلة:

4.1. تعريف [3]: لتكن Gزمرة لي متراصة، و $\mathfrak{g}$ جبر لي الموافق لها، تعرّف الطارة (Torus) الأعظمية من G بأنّها زمرة جزئية تبديلية مترابطة أعظمية منG، ويعرّف جبر كارتان (Cartan) على أنّه الجبر الجزئي التبديلي الأعظمي من $\mathfrak{g}$، ويبرهن على أنّ زمرة لي المتراصة تماثل دوماً زمرة جزئية من الزمرة $GL(n, F)$، وأنّ جبر لي $\mathfrak{g}$ الموافق لها هو حقيقي ويمكن تمديده إلى جبر لي عقدي $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

4.2. تعريف [3]: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة لي المتراصة G على الفضاء $V(\mathbb{C})$، ولتكن T طارة أعظمية من G، وليكن $\mathfrak{t}$ جبر كارتان الجزئي من $\mathfrak{g}$والموافق لـ T ، يقال عن $\mu: \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{C}$ إنّه وزن لـ ρ إذا وُجِدَ $v \in V$ بحيث يكون:

$$d\rho(H)v = \mu(H)v \ \ \forall\ H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$$

ويُرمز لمجموعة الأوزان بالرمز $\Delta(V)$.

يُقال عن $\alpha: \mathfrak{t} \longrightarrow \mathbb{C}$ إنّه جذر إذا وجد $Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$، بحيث يكون:

$$[H, Z] = \alpha(H)Z \ \ \forall\ H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$$

ويرمز لمجموعة الجذور بالرمز $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

تسمى مجموعة الجذور $\prod(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \subset \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ بالجذور البسيطة، والتي تحقق:

$$\forall\ \beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \ \ \beta = \sum_{\alpha \in \prod(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} k\alpha$$

بحيث تكون المعاملات k هي أعداد إما جميعها موجبة أو جميعها سالبة.

وتعرّف مجموعة الجذور الموجبة $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ بالشكل:

$$\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \left\{\beta \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) : \ \beta = \sum_{\alpha \in \prod(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} k\alpha \ \ ; \ k \in Z_{\geq 0}\right\}$$

ويُقال عن الوزن μ إنّه وزن أعلى إذا تحقق:

$$\mu - \grave{\mu} = \sum_{\alpha \in \prod(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})} k\alpha \ \ ; \ k \in R_{\geq 0} \ \ \forall\ \grave{\mu} \in \Delta(V)$$

4.3. تعريف [3]: ليكن ρ تمثيلاً لزمرة ليG على الفضاء $V(\mathbb{C})$، يُعرّف مميز التمثيل (Character) بأنّه الدالة:

$$\chi: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

حيث $\chi_\rho(g) = tr[\rho_g]$، ويبرهن على أنّه إذا كان ρ, σ تمثيلين غير خزولين للزمرة G على الفضاءين $V(\mathbb{C}), W(\mathbb{C})$ على الترتيب، فإنّ:

$$\langle\chi_\rho, \chi_\sigma\rangle = \int_G \overline{\chi_\rho(g)}\, \chi_\sigma(g) dg = \begin{cases} 1\ ; \ \rho \cong \sigma \\ 0\ ; \ \rho \ncong \sigma \end{cases}$$

ويكون التمثيل ρ غير خزول إذا وفقط إذا كان $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$، كما أنّ مميز التمثيل الثنوي يُعطى بالشكل:

$$\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)} \ \ \forall\, g \in G$$

يمكن الآن عرض مثال يدعم المبرهنة (2.12) مثال: لتكن $SO(2)$ زمرة لي والتي كل عنصر منها يمثل دوران حول المبدأ بزاوية $0 \le \theta \le 2\pi$، أو يمكن التعبير عن هذه الزمرة بالشكل:

$$SO(2) = \{A \in GL(2,\mathbb{R})\ ; AA^T = I\ , \det(A) = 1\}$$

وليكن ρ تمثيلاً للزمرة $SO(2)$ معرّفاً بالشكل:

$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \qquad\qquad \rho: SO(2) \longrightarrow GL(2,\mathbb{C})$$

عندئذٍ يكون $\chi_\rho(\theta) = 2cos\theta = e^{-i\theta} + e^{i\theta}$، وعليه $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle \neq 1$ وبالتالي ρ خزول، كما أنّ $\chi_{\rho^*}(\theta) = \overline{\chi_\rho(\theta)} = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$، وبالتالي ρ^* أيضاً خزول.

4.4. تعريف [3]: لتكن G زمرة لي مترابطة متراصة، و T طارة أعظمية، ولتكن:

$$N(T) = \{g \in G; gTg^{-1} = T\}$$

عندئذٍ تعرّف زمرة $(Weyl)$ بالشكل:

$$W = N(T)/T$$

وإذا كان ρ تمثيلاً لـ G، فإنّ صيغة $(Weyl)$ للمميزات تعطى بالشكل:

$$\chi_\rho(e^H) = \frac{\sum_{w\in W} \det(w) e^{[w(\mu+\delta)](H)}}{\sum_{w\in W} \det(w) e^{(w\delta)(H)}} \quad \forall\, H \in \mathfrak{t}_\mathbb{C}$$

حيث μ وزن أعلى لـ ρ، كما أنّ:

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C})} \alpha.$$

4.5. تعريف [5]: ليكن ρ, σ تمثيلين لزمرة لي G على الفضاءين $V(F), W(F)$ على الترتيب، يقال عن التطبيق $\varphi: V \longrightarrow W$ إنّه تطبيق مشابكة (Intertwining) إذا تحقق:

$$\big(\varphi \circ \rho(g)\big)(v) = (\sigma(g) \circ \varphi)(v) \quad \forall\, g \in G\ , v \in V$$

وفي الحالة التي يكون فيها φ تقابل يُقال عن σ و ρ إنّهما متماثلان.

كما يبرهن من أجل أي تمثيلين ρ, σ لزمرة لي G على الفضاءين $V(F), W(F)$ على أنّه إذا كان σ و ρ متماثلان فإنّ:

$$\chi_\rho(g) = \chi_\sigma(g)\ \forall\, g \in G$$

وإذا كان σ و ρ تمثيلين خزولين تماماً لزمرة لي G على الفضاءين $V(F), W(F)$ حيث F حقل مغلق جبرياً، ومميزه لا يقسم مرتبة الزمرة G عندئذٍ، σ و ρ متماثلان إذا وفقط إذا كان $\chi_\rho(g) = \chi_\sigma(g)\ \forall\, g \in G$

4.6. مبرهنة: ليكن ρ, σ تمثيلين غير خزولين لزمرة لي المترابطة المتراصة G على الفضاءين $V(F), W(F)$ على الترتيب، حيث F حقل مغلق جبرياً ومميزه لا يقسم مرتبة الزمرة G، وكان ρ, σ يملكان الوزن الأعلى نفسه، عندئذٍ ρ^*, σ^* متماثلان.

الإثبات: بفرض أنّ σ و ρ يملكان الوزن الأعلى نفسه λ، ولتكن T طارة أعظمية للزمرة G، بما أنّه يمكن دراسة تمثيل الزمرة G من خلال مقصوره على T، فإنّ مميز كل من التمثيلين ρ, σ يتعين من خلال عناصر T، عندئذٍ حسب صيغة (Weyl) للمميزات يكون:

$$\chi_\rho(e^H)=\frac{\sum_{w\in W}\det(w)e^{[w(\lambda+\delta)](H)}}{\sum_{w\in W}\det(w)e^{(w\delta)(H)}}=\chi_\sigma(e^H)\quad \forall\, H\in t_{\mathbb{C}}$$

وعليه يكون:

$$\overline{\chi_\rho(g)}=\overline{\chi_\sigma(g)}\ \ \forall\, g\in G$$

ومنه $\chi_{\rho^*}(g)=\chi_{\sigma^*}(g)$.

لنفرض جدلاً أنّ ρ^*,σ^* غير متماثلين، عندئذٍ $\langle\chi_{\rho^*},\chi_{\sigma^*}\rangle=0$ لكنّ ρ^* غير خزول

و $\chi_{\rho^*}=\chi_{\sigma^*}$، وعليه يكون $\langle\chi_{\rho^*},\chi_{\sigma^*}=\chi_{\rho^*}\rangle=1$ وهذا تناقض، بالتالي ρ^*,σ^* متماثلان.

4.7. مبرهنة: ليكن ρ,σ تمثيلين لزمرة لي المتراصة G على الفضاءين $V(\mathbb{C}),W(\mathbb{C})$ على الترتيب، عندئذٍ ρ وσ متماثلان إذا وفقط إذا كان σ^* و ρ^* متماثلان.

الإثبات: بفرض أنّ σ و ρ متماثلان، عندئذٍ $\chi_\rho(g)=\chi_\sigma(g)\ \forall\, g\in G$، وعليه يكون $\overline{\chi_\rho(g)}=\overline{\chi_\sigma(g)}$، ومنه $\chi_{\rho^*}(g)=\chi_{\sigma^*}(g)$ ، أي أنّ σ^* و ρ^* متماثلان.

الآن بفرض σ^* و ρ^* متماثلان، عندئذٍ $\chi_{\rho^*}(g)=\chi_{\sigma^*}(g)\ \forall\, g\in G$، ومنه $\overline{\chi_{\rho^*}(g)}=\overline{\chi_{\sigma^*}(g)}$ ، بالتالي $\overline{\overline{\chi_\rho(g)}}=\overline{\overline{\chi_\sigma(g)}}$، وعليه يكون $\chi_\rho(g)=\chi_\sigma(g)$، أي أنّ σ و ρ متماثلان، وبذلك يتم المطلوب.

4.8. تعريف [5]: ليكن ρ,σ تمثيلين لزمرة لي G على الفضاءين $V(F),W(F)$ على

الترتيب عندئذٍ يُعرّف π تمثيل الزمرة G على الفضاء $Hom(V,W)$ بالشكل:

$$\pi_g(f)=\sigma_g\circ f\circ\rho_{g^{-1}}\ \ \forall\ \ f\in Hom(V,W)$$

ويبرهن في [1] على أنّه إذا كانت $V(F),W(F),U(F)$ فضاءات متجهية، فإنّ:

$$Hom(V\oplus W,U)\cong Hom(V,U)\oplus Hom(W,U)$$

وإذا كانت G تملك تمثيلات على الفضاءات $V(F),W(F),U(F)$، فإنّ التماثل السابق هو $G-$ تماثل، وباعتبار الحقل F فضاء متجهي أُحادي البعد، يعرّف تمثيل للزمرة G على الفضاء F يُسمى التمثيل المبتذل.

إذا كان ρ خزول تماماً لزمرة لي G على الفضاء V فإنّه يُكتب على شكل مجموع مباشر لتمثيلات جزئية غير خزولة ρ_{W_i}، حيث W_iهي $G-$ فضاءات جزئية من V، على الرغم من كون $\rho^*_{W_i}$ ليست تمثيلات جزئية من ρ^* كما أوضحنا سابقاً، إلا أنّه يمكن بناء تمثيل يماثل ρ^* بالاعتماد على التمثيلات $\rho^*_{W_i}$، وهذا ما ستبينه المبرهنة التالية.

4.9. مبرهنة: ليكن ρ تمثيلاً خزولاً تماماً لزمرة لي G على الفضاء $V(F)$، حيث $\rho=\rho_{W_1}\oplus\rho_{W_2}\oplus\dots\oplus\rho_{W_m}$،

عندئذٍ $\rho^*\cong\rho^*_{W_1}\oplus\rho^*_{W_2}\oplus\dots\oplus\rho^*_{W_m}$.

الإثبات: بما أنّ $\rho=\rho_{W_1}\oplus\rho_{W_2}\oplus\dots\oplus\rho_{W_n}$، فإنّ $W_i\,;m=1,2,\dots,m$ هي $G-$ فضاءات جزئية من V، بحيث:

$$V=W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_m$$

وبما أنّ G تملك تمثيلاً على F يكون:

$$Hom(V,F)=Hom(W_1\oplus W_2\oplus\dots\oplus W_m,F)$$
$$\cong Hom(W_1,F)\oplus Hom(W_2,F)\oplus\dots\oplus Hom(W_m,F)$$

وعليه يكون:

$$V^*\cong W_1^*\oplus W_2^*\oplus\dots\oplus W_m^*$$

أي أنّ:

$$\rho^* \cong \rho^*_{W_1} \oplus \rho^*_{W_2} \oplus \dots \oplus \rho^*_{W_m}$$

4.10. نتيجة: كل تمثيل ثنوي ρ^* لزمرة لي المتراصة G يماثل مجموع مباشر لثنوية تمثيلات جزئية من ρ.

الإثبات: بما أنّ كل تمثيل لزمرة لي المتراصة هو تمثيل خزول تماماً، عندئذٍ إذا كان ρ تمثيلاً لـG على الفضاء $V(F)$، فإنّ:

$$\rho = \rho_{W_1} \oplus \rho_{W_2} \oplus \dots \oplus \rho_{W_n}$$

حيث $W_i\ ; m = 1,2,\dots,m$ هي G – فضاءات جزئية من V، وحسب المبرهنة (4.9) يتم المطلوب.

References:

1. Halms, Paul. (1995). LINEAR ALGEBRA PROBLEM BOOK. United States of America. The Mathematical Association of America. P: 349.
2. Matsushima, Yozo. (1972). DIFFERENTIABLE MANIFOLDS. Department of Mathematics. University of Noter Dame. P: 313.
3. Sepanski, Mark. (2007). Compact Lie Groups. Springer. P: 207.
4. Tu, Loring. (2011). An Introduction to Manifolds.2nd ed. Springer. P: 430.
5. Ziller, Wolfgang. (2010). Lie Groups.Representation theory and Symmetric Space. Univresity of Pennsylvania. P:187.