المؤثِّرات محدودة القوى غير متوسطة الإرغوديّة

محمّد الخطيب*   د. محمّد بشير قابيل   د. محمّد صبح****

الملخص

إنَّ الهدفَ الرّئيس لهذه الورقة البحثية هو عرضُ إنشاء مؤثِّر محدود القوى غير متوسط الإرغوديّة على فضاء باناخ غير انعكاسي ذي قاعدة شاودر في الحالة العامّة.

الكلمات المفتاحية: فضاء باناخ الانعكاسي. قاعدة شاودر. المؤثِّر محدود القوى. المؤثِّر متوسط الإرغوديّة.

التّصنيف الرّياضيّاتي (2010): $47A35$.

* طالب دراسات عليا (ماجستير)، قسم الرّياضيّات، كلّيّة العلوم، جامعة دمشق.

** أستاذ دكتور، قسم الرّياضيّات، كلّيّة العلوم، جامعة دمشق.

Non-mean Ergodic Power Bounded Operators

M.Alkateeb* **Dr. M. B. Kabil**** **Dr. M. Soubeh****

Abstract

The main purpose of this research paper is to present a construction of a non-mean ergodic power bounded operator on a non-reflexive Banach space with a Schauder basis in the general case.

Key Words: Reflexive Banach Space. Schauder Basis. Power Bounded Operator. Mean Ergodic Operator.

MSC(2010): $47A35$.

* MSc Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

** Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.

أوّلاً – المقدّمة:

أُثْبِتَ أنَّ كلَّ مؤثِّرٍ محدود القوى في فضاء باناخ انعكاسي يكون متوسط الإرغوديّة (انظر ([7] .[9] .[12]))، ثُمَّ بُيّنَ في [5] أنَّ العكسَ صحيحٌ لأجل فضاءات باناخ ذات قاعدة شاودر. فيما يلي سنذكر (في القسم الثّاني) بعض المفاهيم الأساسيّة التي سنحتاجها لاحقاً، ألا وهي: الانعكاسية في فضاءات باناخ، التّبولوجيا الضّعيفة*، قاعدة شاودر، المؤثّرات الخطّيّة والنّظريّة الإرغوديّة. سنورد (في القسم الثّالث) مثالاً بسيطاً عن مؤثّر محدود القوى غير متوسط الإرغوديّة معرَّف في فضاء المتتاليات المتقاربة c. سنثبت (في القسم الرّابع) لأجل فضاء باناخ غير انعكاسي ذي قاعدة شاودر أنَّه توجد متتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من المؤثّرات الإسقاطية تحقّق شروطاً معينة. سنقدّم (في القسم الخامس) عرضاً لإنشاء مؤثّر محدود القوى غير متوسط الإرغوديّة في فضاء باناخ غير انعكاسي ذي قاعدة شاودر بالاستفادة من متتالية الإسقاطات $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$، وبحيث يغدو المثال (في القسم الثّالث) حالةً خاصّةً من هذا الإنشاء.

ثانياً – مفاهيم أساسيّة:

1.2 – الانعكاسية في فضاءات باناخ: Reflexivity in Banach Spaces $([2], p. 8)$

ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاءَ باناخ، وليكن $(\mathbb{E}^{\star}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star}})$ و $(\mathbb{E}^{\star\star}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star\star}})$ الفضاء الثّنوي Dual Space الأوّل والثّاني لـ $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ على التّرتيب.

ثمّة تطبيقٌ $J: (\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}}) \longrightarrow (\mathbb{E}^{\star\star}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star\star}})$ (يدعى التّطبيق القانوني Canonical Mapping) معرَّفٌ كما يلي:

لأيّ $x \in \mathbb{E}$ إنَّ التّطبيق $f \longmapsto f(x)$ (حيث $f \in \mathbb{E}^{\star}$) داليّ خطّيٌّ مستمرٌ على $(\mathbb{E}^{\star}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star}})$، لذلك هو عنصر من $\mathbb{E}^{\star\star}$ ولنرمز له بـ $J(x)$، ويتحقّق $\big(J(x)\big)(f) = f(x)$ لأيّ $x \in \mathbb{E}$ ولأيّ $f \in \mathbb{E}^{\star}$. من الواضح أنَّ التّطبيق J خطّيٌّ وإيزومتري Isometric (أي $\|J(x)\|_{\mathbb{E}^{\star\star}} = \|x\|_{\mathbb{E}}$ لأيّ $x \in \mathbb{E}$). لذلك، من الممكن مطابقة $\mathbb{E}$ مع فضاء جزئي من $\mathbb{E}^{\star\star}$ باستخدام التّطبيق J ونكتب (تجاوزاً) $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{E}^{\star\star}$. إذا كان التّطبيقُ

J غامراً أي $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{\star\star}$ يقالُ إنَّ الفضاء $\mathbb{E}$ انعكاسيٌ Reflexive، أمّا إذا كان $\mathbb{E} \subsetneq \mathbb{E}^{\star\star}$ يقالُ إنَّ الفضاء $\mathbb{E}$ غيرُ انعكاسي.

أمثلة على فضاءات باناخ الانعكاسية:

1) أيُّ فضاء منظَّم منتهي البعد $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ هو فضاء باناخ انعكاسي؛ وذلك لأنَّ $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{E}^{\star} = \dim \mathbb{E}^{\star\star}$. $([2], p. 67)$

2) فضاءات الدّوال $\mathcal{L}^p$ حيث $1 < p < +\infty$ هي فضاءات انعكاسية. $([2], p. 95)$

3) فضاءات المتتاليات ℓ^p حيث $1 < p < +\infty$ هي فضاءات انعكاسية. $([2], p. 358)$

4) أيُّ فضاء هيلبرت $(\mathbb{H}, \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{H}})$ هو فضاء انعكاسي. $([2], p. 137)$

أمثلة على فضاءات باناخ غير الانعكاسية:

1) فضاءا الدّوال $\mathcal{L}^1$ و$\mathcal{L}^\infty$ هما فضاءان غير انعكاسيين. $([2], p. 101{,}102)$

2) فضاءا المتتاليات ℓ^1 وℓ^∞ هما فضاءان غير انعكاسيين. $([2], p. 360)$

3) الفضاء c (فضاء المتتاليات المتقاربة) والفضاء c_0 (فضاء المتتاليات المتقاربة من الصّفر) هما فضاءان غير انعكاسيين. $([2], p. 360)$

2.2 – التّبولوجيا الضّعيفة* $\boldsymbol{\sigma}(\mathbb{E}^{\star}, \mathbb{E})$ على $\mathbb{E}^{\star}$: Weak* Topology $([3], p. 512)$

من الممكن تعريف تبولوجيا أخرى على$\mathbb{E}^{\star}$ أضعف من تبولوجيا النّظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star}}$ كما يأتي:

ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ و$(\mathbb{E}^{\star}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star}})$ فضاءه الثّنوي. إنَّ أضعف (أخشن) تبولوجيا على $\mathbb{E}^{\star}$ التي تجعل جميع التّطبيقات:

$$f \longmapsto f(x) \qquad (x \in \mathbb{E})$$

مستمرةً تسمَّى التّبولوجيا الضّعيفة* (أو $\sigma(\mathbb{E}^{\star}, \mathbb{E})$) على $\mathbb{E}^{\star}$.

1.2.2 – مبرهنة: $([2], p. 63)$

ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ و $(\mathbb{E}^{\star}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star}})$ فضاءه الثّنوي. لتكن $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً من عناصر $\mathbb{E}^{\star}$ و $f \in \mathbb{E}^{\star}$. إنَّ القضايا الآتية محقّقة:

1) إنَّ $\left(\mathbb{E}^{\star}, \sigma(\mathbb{E}^{\star}, \mathbb{E})\right)$ فضاء هاوسدورفي Hausdorff.

2) الشّرط اللّازم والكافي لتقارب المتتالية $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من f في $\sigma(\mathbb{E}^{\star}, \mathbb{E})$ هو أن يكون $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ لأيّ $x \in \mathbb{E}$.

3) إذا كانت $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}^{\star}}$ فإنَّ $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ في $\sigma(\mathbb{E}^{\star}, \mathbb{E})$. (العكس غير صحيح بالضّرورة).

3.2 – قاعدة شاودر: Schauder Basis

1.3.2 – تعريف: $([4], p. 182. [5], p. 148)$

ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ غير منتهي البعد. يقالُ عن متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathbb{E}$ إنَّها قاعدة شاودر لـ $\mathbb{E}$ إذا كان لأيّ $x \in \mathbb{E}$ توجد متتالية وحيدة من السّلميات $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث أنَّ $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$، أي:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = x$$

حيث التّقارب بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$.

إذا كان $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ منتهي البعد $(\dim \mathbb{E} = n < +\infty)$، فإنَّ مفهوم قاعدة شاودر يتطابق مع المفهوم الجبري للقاعدة.

وتعرَّف عندئذ مؤثّرات الإسقاط الإحداثية لأيّ $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$$Q_n: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \qquad x = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x_j \longmapsto Q_n(x) := a_n x_n$$

أمّا مؤثّرات المجاميع الجزئية فتعرَّف لأيّ $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$$S_n: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \qquad x = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j x_j \longmapsto S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} Q_j(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

إنَّ S_n (Q_n) مؤثّر إسقاط خطّي مستمر لـ $\mathbb{E}$ على الفضاء الجزئي المغلق $span\{x_1, x_2, .., x_n\}$ $(span\{x_n\})$، ولأيّ $x \in \mathbb{E}$ فإنَّ $S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$، وكما أنَّ المؤثرات $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (وكذلك المؤثّرات $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$) محدودة بانتظام؛ أي $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|S_n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} < +\infty$. (حيث $\|\cdot\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})}$ النّظيم المعرَّف على $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ فضاء جميع المؤثّرات الخطّيّة المحدودة لـ $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$). (انظر (4.2)).

أمثلة على قاعدة شاودر : ($[4], p. 185$)

1) أيُّ قاعدةٍ (بالمفهوم الجبري) لفضاء منظَّم منتهي البعد $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ هي قاعدة شاودر لـ $\mathbb{E}$.

2) أيُّ قاعدةٍ متعامدة لفضاء هيلبرت فَصول $(\mathbb{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}})$ هي قاعدة شاودر لـ $\mathbb{H}$.

3) إنَّ متجهات الواحدة القانونية $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ والمعرَّفة بـ:

$$e_n := \left(\delta_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq n \\ 1 & : \quad k = n \end{cases}$$

لأيّ $n \in \mathbb{N}$، هي قاعدة شاودر لكل من ℓ^p حيث $1 \leq p < +\infty$ و c_0.

4) إنَّ متجهات الواحدة القانونية مع $\mathbf{1} = (1,1,, . . ,1, ...)$ هي قاعدة شاودر لـ c.

ليكن $e_0 := \mathbf{1} = (1,1,, . . ,1, ...)$. لتكن $x = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ بحيث أنَّ $\eta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \eta$.

لنعرّف $a_0 := \eta$ و $a_n := \eta_n - \eta$ لأيّ $n \in \mathbb{N}$. نلاحظ أنَّ $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

ليكن $n \in \mathbb{N}$ لأيّ

$$y_n := \sum_{k=0}^{n} a_k e_k = \eta e_0 + \sum_{k=1}^{n} (\eta_k - \eta) e_k$$

نلاحظ أنَّ

$$x - y_n = (0,0, ... ,0, \eta_{n+1} - \eta, \eta_{n+2} - \eta, ...)$$

ومنه

$$\|x - y_n\| = \sup_{m\geq n+1} |\eta_m - \eta| = \sup_{m\geq n+1} |a_m|$$

لذلك

$$\lim_{n\to+\infty}\|x-y_n\| = \lim_{n\to+\infty}\sup_{m\geq n+1}|a_m| = 0$$

وبالتّالي تشكّل المتجهات $(e_n)_{n=0}^{+\infty}$ قاعدة شاودر للفضاء c.

5) إنَّ المتجهات $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرَّفة بـ:

$$\gamma_n = \left(\beta_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}} := \begin{cases} 1 & : \quad k\geq n \\ 0 & : \quad k<n \end{cases}$$

لأيّ $n\in\mathbb{N}$، هي قاعدة شاودر لـ c.

2.3.2 – تعريف:

ليكن $(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ ذو قاعدة شاودر $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. يقال إنَّ القاعدة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1) انكماشية: Shrinking $([5], p.149. [11], p.268)$

إذا كان لأيّ $f\in\mathbb{E}^\star$ فإنَّ:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f|_{\overline{\operatorname{span}}_{k\geq n}\{x_k\}}\right\|_{\mathbb{E}^\star} = 0$$

بشكل مكافئ، لأيّ $f\in\mathbb{E}^\star$ فإنَّ $f\circ S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}^\star}$.

2) تامّة بشكل محدود: Boundedly Complete $([8], p.9)$

إذا كان لأيّ متتاليةٍ من السّلميات $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق الشرط $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\|_{\mathbb{E}} < +\infty$ فإنَّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ متقاربةٌ.

المبرهنة الآتية تربط بين الانعكاسية من جهة وقاعدة شاودر من جهة أخرى.

3.3.2 – مبرهنة: $([6], p.519)$

ليكن $(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ ذو قاعدة شاودر $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$، عندئذ: إنَّ $\mathbb{E}$ انعكاسيٌ إذا وفقط إذا كانت القاعدة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ انكماشيةً وتامّة بشكلٍ محدودٍ.

4.2 – المؤثّرات الخطّيّة المحدودة: Bounded Linear Operators $([3], p.136,510)$

ليكن $T:(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})\longrightarrow(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ مؤثّراً خطّيّاً محدوداً لفضاء باناخ $(\mathbb{E},\|\cdot\|_{\mathbb{E}})$. لنرمز بـ $ker(T)$، $ran(T)$، $fix(T)$ و$A_n[T]$ لنواة، مدى، الفضاء الثّابت ووسط سيزارو لأوّل n تكرار لـ T على التّرتيب، أي:

$$ker(T) := \{x \in \mathbb{E} \ : \ T(x) = 0_{\mathbb{E}}\}$$
$$ran(T) := \{T(x) \ : \ x \in \mathbb{E}\} = T(\mathbb{E})$$
$$fix(T) := \{x \in \mathbb{E} \ : \ T(x) = x\} = ker(I_{\mathbb{E}} - T)$$

حيث $I_{\mathbb{E}}$ المؤثّر المطابق لـ $\mathbb{E}$.

$$A_n[T] := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j = \frac{I_{\mathbb{E}} + T + T^2 + \cdots + T^{n-1}}{n}$$

وإنَّ $A_n[T]$، لأيّ $n \in \mathbb{N}$، مؤثّر خطّيٌّ محدود لفضاء باناخ $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$. ونكتب A_n عوضاً عن $A_n[T]$ إن أمن اللّبس.

ليكن $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ فضاء جميع المؤثّرات الخطّيّة المحدودة لفضاء باناخ $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$. إنَّ المساواة:

$$\|T\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} := \sup_{\substack{x\in\mathbb{E} \\ \|x\|_{\mathbb{E}}\le 1}} \|T(x)\|_{\mathbb{E}} \qquad \forall T \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$$

تعرّف نظيماً على$\mathbb{B}(\mathbb{E})$، وإذا كان $\|T\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \le 1$ يقال إنَّ المؤثّر T تقليصي Contraction.

إنَّ $\left(\mathbb{B}(\mathbb{E}), \|\cdot\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})}\right)$ فضاء باناخ. لذلك إنَّ التّقارب بالإطلاق لأيّ متسلسلة من عناصر $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ يقتضي تقاربها.

1.4.2 – تعريف: $([3], p. 146,148)$

يقالُ عن مؤثّر $T \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ إنّه:

1) محدود القوى Power Bounded إذا كان $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} < +\infty$.
2) محدود وفق مفهوم سيزارو Cesaro Bounded إذا كان $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} < +\infty$.

من الواضح أنَّ كلَّ مؤثّر تقليصي يكون محدود القوى، وأنَّ كلَّ موثّر $T \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ محدود القوى يكون محدوداً وفق مفهوم سيزارو ويحقّق $\frac{1}{n} T^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathbb{E}}$ لأيّ $x \in \mathbb{E}$.

5.2 – النّظريّة الإرغوديّة: Ergodic Theory

1.5.2 – تعريف: $([3], p. 138)$

يقالُ عن مؤثِّر $T \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ إنَّه متوسط الإرغوديّة Mean Ergodic إذا كانت النّهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j(x)$$

موجودةً لأيِّ $x \in \mathbb{E}$.

2.5.2 – مبرهنة: $([3], p.148)$

ليكن $T \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ مؤثِّراً محدوداً وفق مفهوم سيزارو بحيث أنَّ $\frac{1}{n}T^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_{\mathbb{E}}$ لأيِّ $x \in \mathbb{E}$. عندئذ إنَّ T متوسط الإرغوديّة إذا وفقط إذا كان $\mathbb{E} = fix(T) \oplus \overline{ran}(I_{\mathbb{E}} - T)$.

أمثلة على مؤثّرات متوسطة الإرغوديّة:

1) كلُّ مؤثِّر تقليصي في فضاء هيلبرت يكون متوسط الإرغوديّة. $([3], p.139)$

2) إذا كان $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \mu, T)$ نظاماً محافظاً على القياس Measure Preserving System (أي $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \mu)$ فضاء احتمالي و$T: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ تطبيق قيوس يحقّق $\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ لأيِّ $B \in \mathcal{B}$) و U_T مؤثر كوبمان Koopman Operator الموافق لـ T والمعرَّف بـ:

$$U_T: \mathcal{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \mu) \longrightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \mu) \qquad f \longmapsto U_T(f) := f \circ T$$

لأيِّ $1 \le p < +\infty$. فإنَّ U_T متوسط الإرغوديّة. $([3], p.140)$

3) كلُّ مؤثِّر محدود القوى في فضاء باناخ انعكاسي يكون متوسط الإرغوديّة. $([3], p.149)$

لاحظ أنَّ المثال الأوّل هو حالةٌ خاصّةٌ من المثال الثّالث وذلك لأنَّ كلَّ مؤثِّر تقليصي يكون محدود القوى وكلَّ فضاء هيلبرت هو فضاء باناخ انعكاسي.

أثبت [5] أنَّ العكس صحيح في المثال الثّالث لأجل فضاءات باناخ ذات قاعدة شاودر، أي: ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ ذا قاعدة شاودر. عندئذ إنَّ $\mathbb{E}$ انعكاسي إذا وفقط إذا كان كلُّ مؤثِّر $T \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ محدود القوى متوسط الإرغوديّة. وتبقى هذه المبرهنة محقّقةً

إذا كان $\mathbb{E}$ فضاء فريشيه (فضاءٌ متجهيّ تبولوجيّ محدَّبٌ محلّيّاً ومتورٌ وتامٌّ) ذا قاعدة شاودر. $([1], p. 403,428)$

ثالثاً – المثال في حالة خاصّة: $([3], p. 151)$

ليكن $(c, \|\cdot\|_c)$ فضاء المتتاليات المتقاربة حيث النّظيم $\|\cdot\|_c$ معرَّف بـ $\|x\|_c := \sup_{n\in\mathbb{N}}|\eta_n|$ لأيّ $x = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من c. إنَّ c فضاء باناخ غير انعكاسي ذو قاعدة شاودر.

لتكن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً متزايدةً من عناصر المجال $]0,1[$ بحيث أنَّ $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

لنعرّف المؤثّر:

$$B: (c, \|\cdot\|_c) \longrightarrow (c, \|\cdot\|_c) \qquad x = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto B(x) := (\alpha_n\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

من الواضح أنَّ $B(x) = (\alpha_n\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ لأيّ $x = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$، وذلك لأنَّ المتتالية $(\alpha_n\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة، وتحقّق أيضاً:

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n\eta_n) = \left(\lim_{n\to+\infty}\alpha_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty}\eta_n\right) = (1)\left(\lim_{n\to+\infty}\eta_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\eta_n$$

إنَّ المؤثّر B خطّيٌّ (وضوحاً) وتقليصي؛ وذلك لأنَّ:

بما أنَّ $0 < \alpha_n < 1$ لأيّ $n \in \mathbb{N}$ فإنَّ:

$$|\alpha_n\eta_n| = |\alpha_n||\eta_n| = \alpha_n|\eta_n| < (1)|\eta_n| = |\eta_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه $\sup_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n\eta_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}}|\eta_n|$ أي $\|B(x)\|_c \le \|x\|_c$ وبالتّالي $\|B\|_{\mathbb{B}(c)} \le 1$ والمؤثر B تقليصي فهو محدود القوى.

لنضع $T := I_c - B$. نلاحظ أنَّ T مؤثّرٌ خطّيٌّ محدودٌ (وضوحاً) ومتباين وذلك لأنَّ:

ليكن $x = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in ker(T)$ فإنَّ:

$$T(x) = 0_c \quad \Longrightarrow \quad (I_c - B)(x) = 0_c \quad \Longrightarrow \quad I_c(x) = B(x)$$
$$\Longrightarrow \quad \left(\eta_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\alpha_n\eta_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad \eta_n = \alpha_n\eta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

بما أنَّ $\alpha_n \neq 1$ لأيّ $n \in \mathbb{N}$ فإنَّ $\eta_n = 0$ لأيّ $n \in \mathbb{N}$ ومنه $x = 0_c$، وبالتّالي: $ker(T) = \{0_c\}$.

لأيّ $x = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ لدينا $\lim_{n\to+\infty} \eta_n = \lim_{n\to+\infty}(\alpha_n\eta_n)$ ومنه
$\lim_{n\to+\infty} \eta_n - \lim_{n\to+\infty}(\alpha_n\eta_n) = 0$ أي $\lim_{n\to+\infty}(\eta_n - \alpha_n\eta_n) = 0$
ومنه $T(x) \in c_0$، أي $ran(T) \subseteq c_0$.

وبما أنَّ c_0 غيرُ كثيفٍ في c فإنَّ $\overline{ran}(T) \subseteq \bar{c}_0 \subsetneq c$. وبالتّالي:

$$ker(T)\oplus\overline{ran}(T) \subsetneq c$$

لكن $ker(T) = fix(B)$ و $\overline{ran}(T) = \overline{ran}(I_c - B)$، أي:

$$fix(B)\oplus\overline{ran}(I_c - B) \subsetneq c$$

فحسب المبرهنة $(2.5.2)$ إنَّ المؤثر B غير متوسط الإرغوديّة.

إنَّ المثال السّابق هو حالةٌ خاصّةٌ من الإنشاء العام (في القسم الخامس)، إذا اخترنا $\mathbb{E} = c$ و P_n و Q_n (التي ستعرف لاحقاً) هي مؤثّرات الإسقاط على $span\{x_1, x_2, .., x_n\}$ و $span\{x_n\}$ حيث $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قاعدة شاودر لـ $\mathbb{E}$.

رابعاً – الانعكاسية ومتتالية الإسقاطات $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ. ولنفرض أنَّه توجد متتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ في $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ بحيث أنَّ:

1) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودةٌ في $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ و $M := \sup_{n\in\mathbb{N}}\|P_n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})}$.

2) لأيّ $n, m \in \mathbb{N}$ فإن $P_nP_m = P_{min\{n,m\}}$.

أثبت $([10], p.223)$ أنَّه إذا كان $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ انعكاسياً، فإنَّ:

$$\mathbb{E} = \left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)}\right) \oplus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(P_n)\right) \qquad (*)$$

لذلك، من الممكن تعريف مؤثّر إسقاط P لـ $\mathbb{E}$ على $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)}$، وبحيث أنَّ:

(i) $\|P\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \le M$، ولأيّ $x \in \mathbb{E}$ فإنَّ $P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(x)$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$.

(ii) لأيّ $n \in \mathbb{N}$ فإنَّ: $P_nP = PP_n = P_n$.

(iii) $ker(P) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(P_n)$.

(iv) $ran(P) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)}$.

لنفرض الآن أنَّ المتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقّق (إضافة إلى الشّرطين (1) و (2)) الشّرطين:

3) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(P_n) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

4) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)} \subsetneq \mathbb{E}$.

نلاحظ أنَّه إذا كان $\mathbb{E}$ انعكاسياً فإنَّ $(*)$ تقتضي عدم إمكانية تحقق الشّرطين (3) و (4) بآن معًا، وذلك لأنَّ:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(P_n) = \{0_{\mathbb{E}}\} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)} = \mathbb{E}$$

لذلك، لتتوفر احتمالية وجود متتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تحقق الشّروط الأربعة السّابقة يجب أن يكون الفضاء $\mathbb{E}$ غير انعكاسي، وإذا كان $\mathbb{E}$ غير انعكاسي وذا قاعدة شاودر نجد ما يأتي:

1.4 – مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ غير انعكاسي ذا قاعدة شاودر. عندئذ توجد متتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ في $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ تحقّق:

1) إنَّ $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودةٌ في $\mathbb{B}(\mathbb{E})$.

2) لأيّ $n, m \in \mathbb{N}$ فإنَّ $P_n P_m = P_{min\{n,m\}}$.

3) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(P_n) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

4) $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)} \subsetneq \mathbb{E}$.

نلحظ أنَّه حسب (2) إنَّ $P_n^2 = P_n$ لأيّ $n \in \mathbb{N}$، أي P_n مؤثّر إسقاط Projection لأيّ $n \in \mathbb{N}$.

البرهان:

لنفرض أنَّ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ قاعدة شاودر لـ $\mathbb{E}$.

حسب المبرهنة $\big(3.3.2\big)$ إنَّ القاعدة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إمّا غير انكماشية أو غير تامّة بشكل محدود.

الحالة الأوّلى:

بما أنَّ القاعدة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير انكماشية فإنَّه يوجد $f \in \mathbb{E}^\star$ بحيث أنَّ $f \circ S_n \nrightarrow f$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}^\star}$. عندئذ إنَّ المتتالية $(f \circ S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير متقاربة بالنّسبة للنظيم

$\|\cdot\|_{\mathbb{E}^\star}$ وذلك لأنَّه لو كانت متقاربة من عنصر $g \in \mathbb{E}^\star$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}^\star}$ لكان $f \circ S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$ في $\sigma(\mathbb{E}^\star, \mathbb{E})$، وبما أنَّ $f \circ S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ في $\sigma(\mathbb{E}^\star, \mathbb{E})$ و $\sigma(\mathbb{E}^\star, \mathbb{E})$ هاوسدورفية فإنَّ $f = g$ أي $f \circ S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}^\star}$ وهذا تناقض. لذلك يوجد $\varepsilon > 0$ ومتتالية متزايدة تماماً $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ من الأعداد الطبيعية بحيث أنَّ:

$$\left\|f \circ S_{n_{k+1}} - f \circ S_{n_k}\right\|_{\mathbb{E}^\star} \geq \varepsilon$$

وذلك لأيّ $k \in \mathbb{N}$، وتوجد متتالية $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\mathbb{E}$ بحيث أنَّ $\|y_k\|_{\mathbb{E}} = 1$ و:

$$\left|f\left(S_{n_{k+1}}(y_k) - S_{n_k}(y_k)\right)\right| = \left|\left(f \circ S_{n_{k+1}} - f \circ S_{n_k}\right)(y_k)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

وذلك لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

ليكن $z_k := \left(S_{n_{k+1}} - S_{n_k}\right)(y_k)$ و $e_k := \frac{z_k}{f(z_k)}$ فإنَّ: $\|z_k\|_{\mathbb{E}} \leq \|y_k\|_{\mathbb{E}} = 1$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$، أي المتتالية $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ محدودة، و $\|e_k\|_{\mathbb{E}} \leq 1$ و $f(e_k) = 1$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

لنعرّف:

$$P_k(x) := S_{n_k}(x) - f\left(S_{n_k}(x)\right)e_k$$

لأيّ $k \in \mathbb{N}$ ولأيّ $x \in \mathbb{E}$.

نلاحظ أنَّه لأي $k \in \mathbb{N}$ ولأيَّ $x \in \mathbb{E}$ فإنَّ:

$$P_k(x) = S_{n_k}(x) - f\left(S_{n_k}(x)\right)e_k \in ker(f)$$

وذلك لأنَّ:

$$\begin{aligned} f\left(P_k(x)\right) &= f\left(S_{n_k}(x) - f\left(S_{n_k}(x)\right)e_k\right) \\ &= f\left(S_{n_k}(x)\right) - f\left(S_{n_k}(x)\right)f(e_k) \\ &= f\left(S_{n_k}(x)\right) - f\left(S_{n_k}(x)\right)(1) = f\left(S_{n_k}(x)\right) - f\left(S_{n_k}(x)\right) = 0 \end{aligned}$$

لنثبت أنَّ المتتالية $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تحقّق المطلوب.

لأيّ $x \in \mathbb{E}$ ولأيّ $k \in \mathbb{N}$ فإنَّ:

$$\|P_k(x)\|_{\mathbb{E}} \le \left\|S_{n_k}(x)\right\|_{\mathbb{E}} + \left|f\left(S_{n_k}(x)\right)\right| \|e_k\|_{\mathbb{E}}$$
$$\le \|x\|_{\mathbb{E}} + \|f\|_{\mathbb{E}^\star}\left\|S_{n_k}(x)\right\|_{\mathbb{E}} \le \|x\|_{\mathbb{E}} + \|f\|_{\mathbb{E}^\star}\|x\|_{\mathbb{E}}$$

ومنه $\|P_k\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \le 1 + \|f\|_{\mathbb{E}^\star}$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

ليكن $k, t \in \mathbb{N}$ ولنثبت أنَّ $P_k P_t = P_t P_k = P_{min\{k,t\}}$.

$$P_t(x) = S_{n_t}(x) - f\left(S_{n_t}(x)\right) e_t \qquad P_k(x) = S_{n_k}(x) - f\left(S_{n_k}(x)\right) e_k$$

دون المس بالعمومية لنفرض أنَّ $k < t$ ولنثبت أنَّ $P_k P_t = P_t P_k = P_k$.

نلاحظ أنَّ $S_{n_k}\big(P_t(x)\big) = S_{n_k}(x)$، $S_{n_t}\big(P_k(x)\big) = P_k(x)$

و $f\big(P_t(x)\big) = 0$ $= \big(P_k(x)\big)$، ومنه:

$$P_k\big(P_t(x)\big) = S_{n_k}\big(P_t(x)\big) - f\left(S_{n_k}\big(P_t(x)\big)\right) e_k = S_{n_k}(x) - f\left(S_{n_k}(x)\right) e_k = P_k(x)$$

$$P_t\big(P_k(x)\big) = S_{n_t}\big(P_k(x)\big) - f\left(S_{n_t}\big(P_k(x)\big)\right) e_t = P_k(x) - f\big(P_k(x)\big)e_t$$
$$= P_k(x)$$

ليكن $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} ker(P_k)$ فإنَّ $P_k(x) = 0_{\mathbb{E}}$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

لأيّ $k \in \mathbb{N}$ نلاحظ أنَّ:

$$S_{n_k}(x) = S_{n_k}\big(P_t(x)\big) = S_{n_k}(0_{\mathbb{E}}) = 0_{\mathbb{E}} \qquad \forall t \ge k$$

ومنه $S_{n_k}(x) = 0_{\mathbb{E}}$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$، وبما أنَّ $S_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$

فإنَّ $x = 0_{\mathbb{E}}$، وبالتّالي:

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} ker(P_k) = \{0_{\mathbb{E}}\}$$

لنفرض مؤقتاً أنَّ $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)} = \mathbb{E}$.

بما أنَّ $f\big(P_k(x)\big) = 0$ لأيّ $x \in \mathbb{E}$ ولأيّ $k \in \mathbb{N}$ ينتج أنَّ $f \equiv 0_{\mathbb{E}^\star}$ (الدّالي الصّفري)، ومنه:

$$0_{\mathbb{E}^\star} = f \circ S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f = 0_{\mathbb{E}^\star}$$

بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}^\star}$ وهذا تناقض، ومنه الفرض المؤقت خاطئ أي $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)} \subsetneq \mathbb{E}$.

الحالة الثّانية:

بما أنَّ القاعدة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير تامّة بشكل محدود فإنَّه توجد متتالية من السّلميات $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث أنَّ المتتالية $\left(\sum_{j=1}^{k} a_j x_j\right)_{k\in\mathbb{N}}$ محدودة لكنّها غير متقاربة، دون المس بالعمومية لنفرض أنَّ $a_1 = 1$.

ليكن $z_k := \sum_{j=1}^{k} a_j x_j$ فإنَّ $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية محدودة من عناصر $\mathbb{E}$ (يوجد $r > 0$ بحيث أنَّ $\|z_k\|_{\mathbb{E}} \leq r$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$) ولكنها غير متقاربة.

ليكن $f \in \mathbb{E}^\star$ دالي الإحداثي الأوّل (أي $f\left(\sum_{j=1}^{+\infty} b_j x_j\right) = b_1$)، فإنَّ $f(z_k) = 1$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

لنعرّف:

$$P_k(x) := S_k(x) - f(x)z_k$$

لأيّ $k \in \mathbb{N}$ ولأيّ $x \in \mathbb{E}$.

نلاحظ أنَّه لأيّ $k \in \mathbb{N}$ ولأيّ $x \in \mathbb{E}$ فإنَّ:

$$P_k(x) = S_k(x) - f(x)z_k \in ker(f)$$

وذلك لأنَّه ليكن $x \in \mathbb{E}$ فإنَّ $x = \sum_{j=1}^{+\infty} b_j x_j$، ومنه

$$f\big(P_k(x)\big) = f\big(S_k(x) - f(x)z_k\big) = f\left(\sum_{j=1}^{k} b_j x_j - b_1 z_k\right)$$

$$= f\left(\sum_{j=1}^{k} b_j x_j\right) - b_1 f(z_k) = b_1 - b_1(1) = b_1 - b_1 = 0$$

لنثبت أنَّ المتتالية $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ تحقّق المطلوب.

لأيّ $x \in \mathbb{E}$ ولأيّ $k \in \mathbb{N}$ فإنَّ:

$$\|P_k(x)\|_{\mathbb{E}} \leq \|S_k(x)\|_{\mathbb{E}} + |f(x)|\|z_k\|_{\mathbb{E}} \leq \|x\|_{\mathbb{E}} + \|f\|_{\mathbb{E}^\star}\|x\|_{\mathbb{E}} r$$

ومنه $\|P_k\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \leq 1 + r\|f\|_{\mathbb{E}^\star}$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

ليكن $k, t \in \mathbb{N}$ ولنثبت أنَّ $P_k P_t = P_t P_k = P_{min\{k,t\}}$.

$$P_t(x) = S_t(x) - f(x)z_t \qquad P_k(x) = S_k(x) - f(x)z_k$$

دون المس بالعمومية لنفرض أنَّ $k < t$ ولنثبت أنَّ $P_k P_t = P_t P_k = P_k$.

نلاحظ أنَّ $S_k\big(P_t(x)\big) = P_k(x)$، $S_t\big(P_k(x)\big) = P_k(x)$

و $f\big(P_k(x)\big) = f\big(P_t(x)\big) = 0$، ومنه:

$$P_k\big(P_t(x)\big) = S_k\big(P_t(x)\big) - f\big(P_t(x)\big)z_k = P_k(x)$$
$$P_t\big(P_k(x)\big) = S_t\big(P_k(x)\big) - f\big(P_k(x)\big)z_t = P_k(x)$$

ليكن $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} ker(P_k)$ فإنَّ $P_k(x) = 0_{\mathbb{E}}$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

لأيّ $k \in \mathbb{N}$ فإنَّ $S_k(x) = f(x)z_k$، لكن $S_k(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ ومنه $f(x)z_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} x$ بالنّسبة للنظيم $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$، وبما أنَّ المتتالية $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ غير متقاربة نستنتج أنَّ $f(x) = 0$. أي $S_k(x) = 0_{\mathbb{E}}$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$، ومنه $x = 0_{\mathbb{E}}$، وبالتّالي:

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} ker(P_k) = \{0_{\mathbb{E}}\}$$

لنفرض مؤقتاً أنَّ $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)} = \mathbb{E}$.

بما أنَّ $f\big(P_k(x)\big) = 0$ لأيّ $x \in \mathbb{E}$ ولأيّ $k \in \mathbb{N}$ ينتج أنَّ $f \equiv 0_{\mathbb{E}^\star}$ (الدّالي الصّفري)، وهذا تناقض لأنَّ $f(z_k) = 1$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$. ومنه الفرض المؤقت خاطئ أي $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)} \subsetneq \mathbb{E}$.

ليكن $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ فضاء باناخ غير انعكاسي ذو قاعدة شاودر، حسب المبرهنة (1.4) توجد متتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ في $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ بحيث أنَّ:

1) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودةٌ في $\mathbb{B}(\mathbb{E})$ ولنفرض أنَّ $M := \sup_{n\in\mathbb{N}}\|P_n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})}$.

2) لأيّ $n, m \in \mathbb{N}$ فإنَّ $P_nP_m = P_{min\{n,m\}}$.

3) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(P_n) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

4) $\mathbb{E}_1 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ran(P_n)$ ليس كثيفاً في $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$.

لنعرّف المؤثّرات:

$$P_0 := 0_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \quad , \quad Q_n := P_n - P_{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

من الواضح أنَّ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(Q_n) = \{0_{\mathbb{E}}\}$، وذلك لأنَّ:

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(Q_n) \quad \Rightarrow \quad x \in ker(Q_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad Q_n(x) = 0_{\mathbb{E}} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad P_n(x) - P_{n-1}(x) = 0_{\mathbb{E}} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad P_n(x) = P_{n-1}(x) \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

لذا لأيّ $n \in \mathbb{N}$ فإنَّ:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) = \cdots = P_1(x) = P_0(x) = 0_{\mathbb{E}}$$

أي $x \in ker(P_n)$ لأيّ $n \in \mathbb{N}$، ومنه $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(P_n) = \{0_{\mathbb{E}}\}$، وبالتّالي:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ker(Q_n) = \{0_{\mathbb{E}}\} \qquad (I)$$

لنحسب المقدار $Q_k P_n$ لأجل $n, k \in \mathbb{N}$. من البند (2) للمتتالية $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نميّز حالتين:

إذا كان $n \geq k$ فإنَّ:

$$\begin{aligned} Q_k P_n = (P_k - P_{k-1})P_n = P_k P_n - P_{k-1} P_n &= P_{min\{k,n\}} - P_{min\{k-1,n\}} \\ &= P_k - P_{k-1} = Q_k \end{aligned}$$

إذا كان $n < k$ فإنَّ:

$$\begin{aligned} Q_k P_n = (P_k - P_{k-1})P_n = P_k P_n - P_{k-1} P_n &= P_{min\{k,n\}} - P_{min\{k-1,n\}} \\ &= P_n - P_n = 0_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \end{aligned}$$

أي:

$$Q_k P_n = \begin{cases} Q_k & : \quad n \geq k \\ 0_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} & : \quad n < k \end{cases} \qquad (II)$$

وذلك لأجل $n, k \in \mathbb{N}$.

1.5 – إنشاء المؤثّر B:

سننشئ، بالاستفادة من متتالية المؤثّرات الإسقاطيّة $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$، مؤثّراً خطّيّاً محدوداً T سيعرَّف على شكل مجموع متسلسلة متقاربة. ومن ثمَّ نضع $B := I_{\mathbb{E}} - T$. إنَّ B هو المؤثّر المنشود، وذلك بإثبات أنَّه محدود القوى وغير متوسط الإرغوديّة، بالاستفادة من كون $fix(B) = ker(T)$ و $ran(I_{\mathbb{E}} - B) = ran(T)$.

لتكن $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليةً متزايدةً من عناصر المجال $]0,1[$ بحيث أنَّ $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. عندئذ فإنَّ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|(\alpha_{n+1}-\alpha_n)P_n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \le \sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\|P_n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})}$$
$$\le M\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n) = M(1-\alpha_1) < +\infty$$

وبالتّالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)P_n$ متقاربة بالإطلاق في فضاء باناخ $\left(\mathbb{B}(\mathbb{E}), \|\cdot\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})}\right)$ فهي متقاربة، ومنه يوجد $T \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ بحيث أنَّ:

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}-\alpha_n)P_n$$

ولنعرّف:

$$B := I_{\mathbb{E}} - T$$

إنَّ المؤثّر B خطّيٌّ ومحدودٌ (وضوحاً).

من (II) ينتج أنَّ:

$$Q_k\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m-\alpha_n^m)P_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m-\alpha_n^m)Q_kP_n$$
$$= \sum_{n=1}^{k-1}(\alpha_{n+1}^m-\alpha_n^m)\left(0_{\mathbb{B}(\mathbb{E})}\right) + \sum_{n=k}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m-\alpha_n^m)Q_k = (1-\alpha_k^m)Q_k \qquad (III)$$

وذلك لأيّ $m \in \mathbb{N}$.

2.5 – قوى المؤثّر B:

من (III) ولأجل $m = 1$ ينتج أنَّ:

$$Q_kB = Q_k(I_{\mathbb{E}} - T) = Q_k - Q_kT = Q_k - (1-\alpha_k)Q_k = \alpha_kQ_k$$

وذلك لأيّ $k \in \mathbb{N}$.

بما أن المؤثّر B تبديلي مع جميع المؤثّرات Q_k نحصل على $Q_kB^m = \alpha_k^mQ_k$ لأيّ $m \in \mathbb{N}$.

من (III) نجد:

$$Q_k\left(I_{\mathbb{E}} - \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m-\alpha_n^m)P_n\right) = \alpha_k^mQ_k = Q_kB^m$$

وذلك لأيّ $k \in \mathbb{N}$. ولذلك:

$$ran\left(B^m - \left(I_{\mathbb{E}} - \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m - \alpha_n^m)P_n\right)\right) \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} ker(Q_k)$$

لذلك من (I) نجد أنَّ:

$$B^m = I_{\mathbb{E}} - \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m - \alpha_n^m)P_n \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

يترتب على ذلك أنَّ المؤثّر B محدود القوى، وذلك لأنَّ:

$$\|B^m\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m - \alpha_n^m)\|P_n\|_{\mathbb{B}(\mathbb{E})} \leq 1 + M\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{n+1}^m - \alpha_n^m)$$
$$\leq 1 + M(1 - \alpha_1^m) \leq 1 + M$$

3.5 – المؤثّر B غير متوسط الإرغوديّة:

لنبيّن أوّلاً أنَّ المؤثّر T متباينٌ.

ليكن $x \in ker(T)$ فإنَّ $T(x) = 0_{\mathbb{E}}$. من (III) ولأجل $m = 1$ ينتج أنَّ:

$$0_{\mathbb{E}} = Q_k(0_{\mathbb{E}}) = Q_k\big(T(x)\big) = (1 - \alpha_k)Q_k(x)$$

وبما أنَّ $1 - \alpha_k \neq 0$ لأي $k \in \mathbb{N}$ فإنَّ $Q_k(x) = 0_{\mathbb{E}}$ لأيّ $k \in \mathbb{N}$، لذا $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} ker(Q_k) = \{0_{\mathbb{E}}\}$ أي المؤثّر T متباين، وبالتّالي:

$$ker(T) = \{0_{\mathbb{E}}\}$$

من تعريف T نجد أنَّ $ran(T) \subseteq \overline{\mathbb{E}}_1$، ولذلك $ran(T)$ ليس كثيفاً في $\mathbb{E}$، ومنه $B = I_{\mathbb{E}} - T$ غير متوسط الإرغوديّة، وذلك لأنَّ:

$$fix(B) \oplus \overline{ran}(I_{\mathbb{E}} - B) = ker(T) \oplus \overline{ran}(T) \subsetneq \mathbb{E}$$

وذلك حسب المبرهنة $(2.5.2)$. وبذلك يتم المطلوب.

المراجع:

[1] A. A. Albanese. J. Bonet. W. J. Ricker. Mean Ergodic Operators in Frechet Spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 34. (2009). 1 − 37.
[2] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext. Springer. New York. 2011.
[3] T. Eisner. B. Farkas. M. Haase. R. Nagel. Operator Theoretic Aspects of Ergodic Theory. Graduate Texts in Mathematics 272. Springer – Verlag. Cambridge. 2015.
[4] M. Fabian. P. Habala. P. Hajek. V. Montesinos. V. Zizler. Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis. CMS Books in Mathematics. Springer. 2010.
[5] V. P. Fonf. M. Lin. P. Wojtaszczyk. Ergodic Characterizations of Banach Spaces. Journal of Functional Analysis 187 (2001). 146 − 162.
[6] R. C. James. Bases and Reflexivity of Banach Spaces. Annals of Mathematics 52 (1950). 518 − 527.
[7] S. Kakutani. Iteration of Linear Operations in Complex Banach Spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1938). 295 − 300.
[8] J. Lindenstrauss. L. Tzafriri. Classical Banach Spaces I. Springer – Verlag. Berlin. Heidelberg. New Yrok. 1977.
[9] E. R. Lorch. Means of Iterated Transformations in Reflexive Vector Spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939). 945 − 947.
[10] E. R. Lorch. On a Calculus of Operators in Reflexive Vector Spaces. Trans. Math. Soc. 45 (1939). 217 − 234.
[11] I. Singer. Bases in Banach Spaces I. Springer – Verlag. Berlin. 1970.
[12] K. Yosida. Mean Ergodic Theorem in Banach Spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1938). 292 − 294.