تقريب كسري معدل لتابع زيتا الريماني

الاء أبو العينين * ومحمد الشيخ** ومحمد نور شمة***

الملخص

قدمنا في هذه المقالة تعديلاً على متتالية من التوابع الكسرية المتقاربة موضعياً بانتظام لتابع زيتا الريماني، ووجدنا بالنتائج العددية أن التقريب باستخدام التعديل الذي عرفناه يعطي خطأ أقل في التقريب وسرعة أكبر في الوصول إلى النتائج المطلوبة بالإضافة إلى أن مجال التقارب في الطريقة المقدمة في هذه المقالة أكبر. وقمنا بحساب جميع النتائج العددية ورسم التوابع باستخدام البرنامج الحاسوبي ماثماتيكا Wolfram Mathematica 10.0.

الكلمات المفتاحية: تابع زيتا الريماني، فرضية ريمان، المستقيم الحرج، تقريب كسري.

التصنيف الرياضياتي(2010): 11M26, 41A20.

* طالبة دكتوراه، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.

** أستاذ مساعد، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.

*** أستاذ، قسم العلوم الأساسية، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة دمشق والجامعة العربية الدولية (AIU)

A improving fractional approximation to the Riemann zeta function

A. Abuinen*, M. Alcheikh, M. N. Shamma*****

Abstract

In this article, we presented an improvement to a locally uniformly approximation of Riemann zeta function, and we found in the numerical results that the approximation using the adjustment we defined gives a lower error in approximation and velocity in reaching the required results, and the domain of convergence in the method presented in this article is greater. We calculated all numerical results using Wolfram Mathematica 10.0.

Keywords: Riemann Zeta Function, Riemann Hypothesis, Critical Line, Rational Approximation.

2010 Mathematics Subject Classification: 11M26, 41A20 .

* PhD., Student, (2) Associate Professor, Department of Mathematics,
** Faculty of Sciences, Damascus, (3) Professor, Basic Sciences Department,
*** Faculty of Mechanical Engineering and Electrical , and Arab International University(AIU).

1. مقدمة:

نظراً لأهمية توابع زيتا وتطبيقاتها في العصر الراهن وفرضية ريمان حول أصفار التابع زيتا الريماني التي كانت ومازالت عصية الحل على العلماء، قمنا في هذه المقالة بدراسة متتالية من التوابع الكسرية المتقاربة موضعياً بانتظام لتابع زيتا الريماني والمعرفة في المقالة [1]، ولكن لاحظنا أثناء الحسابات أن هذه الطريقة تتطلب وقتاً كبيراً لبناء التقريب، حيث إن هذا الوقت يزداد بازدياد مرتبة التقريب والتعقيد الحسابي الناتج، بالإضافة إلى أن طول مجال التقارب على المستقيم الحرج الذي يحوي أصفار التابع زيتا صغير جداً وهو يكبر بشكل بطيء عند ازدياد مرتبة التقريب، ومنه تعاني هذه الطريقة صعوبة بالغة في دراسة أصفار التابع زيتا حيث نحتاج في ذلك مراتب تقريب عالية جداً، فمثلاً وجدنا بالحسابات العددية في هذه المقالة أنه لإيجاد تابع متقارب نحو التابع زيتا في مجال يحوي الصفر الأول لتابع زيتا، يجب أن تكون مرتبة التقارب أكبر من 1,3 مليون.

لذا قدمنا في مقالتنا هذه تعديلاً لخوارزمية التقريب السابقة، ليصبح التقريب أفضل من حيث:

أولاً: التقريب المعدل يعطي تقريباً بخطأ أقل وبسرعة أكبر.

ثانياً: التقريب المعدل يعطي نتائج تقريبية أفضل وفي مجال أكبر.

ومع ذلك لم نتمكن من الوصول إلى أصفار تابع زيتا الريماني، لان الطريقة بعد التعديل ما زالت بطيئة وتحتاج إلى حواسيب ضخمة ومعالجات سريعة للوصول إلى الأصفار، حيث إن تابع التقريب يزداد تعقيداً بازدياد مرتبة التقريب، ولا يمكن معالجة المراتب العالية جداً باستخدام حواسيب شخصية، إلا أن التعديل الذي

قدمناه أعطى سرعة إضافية هامة، ودقة أكبر في التقريب، ويمكن استثماره للوصول إلى تقريب أفضل لتابع زيتا وبشكل خاص عند المستقيم الحرج الذي يُعدّ مركز اهتمام الكثير من العلماء بهدف التعرف أكثر على الخواص التحليلية لتابع زيتا الريماني عند هذا المستقيم والوصول إلى حل لفرضية ريمان.

2. تعاريف ومفاهيم أساسية:

2_1. تابع زيتا الريماني

يُعرف تابع زيتا الريماني بمتغير عقدي s كما يلي:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

وتتقارب المتسلسلة في الطرف الأيمن بالإطلاق عندما $\mathrm{Re}(s) > 1$ [3,p11].

وتمكن ريمان من تعريف تمديد تحليلي لتابع زيتا على كامل المستوي العقدي ما عدا النقطة

$s = 1$ (التي تمثل قطباً بسيطاً لـ ζ) كما يلي [3,p13]:

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right)$$

حيث ϑ هو تابع تيتا لجاكوبي Jacobi theta function المعرف كما يلي:

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x}$$

وΓ هو تابع غاما العقدي الشهير وهو تحليلي على $\mathbb{C}$ مع وجود أقطاب بسيطة عند النقاط الصحيحة غير الموجبة $s = 0, -1, -2, \dots$ [3,p13].

يحقق تابع زيتا الريماني العلاقة التالية [4,P10]:

$$\zeta(s)=2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)\,;s\in C/\{1\}$$

والتي تسمى بالمعادلة التابعية.

2_2 أصفار تابع زيتا الريماني [3]

لندرس حلول المعادلة التالية:

$$\zeta(s)=0\,;\ s\in C/\{1\}$$

اذا كان $\mathrm{Re}(s)>1$ فإن $\zeta(s)\neq 0$ [3,p11].

اذا كان $\mathrm{Re}(s)<0$، نجد من المعادلة التابعية ما يلي:

بما أن $\mathrm{Re}(s)<0$ فإن $\mathrm{Re}(1-s)>1$ ومنه $\zeta(1-s)\neq 0$ كما رأينا سابقاً ولدينا أيضاً $2^s\pi^{s-1}\Gamma(1-s)$ لا تقبل أصفاراً، وبما أن:

$$\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)=0\Leftrightarrow s=-2k\quad\&\ k\in N^*$$

ومنه فإن تابع زيتا الريماني ينعدم عند النقاط الزوجية السالبة $-2,-4,-6,-8,\dots$ وتسمى أصفاراً بديهية [3,p14]. لتابع زيتا الريماني لأنها تنتج بسهولة.

بقي لدينا المجال $0\leq\mathrm{Re}(s)\leq 1$ والذي يُسمى بالمنطقة الحرجة ويُسمى المستقيم

$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$ بالمستقيم الحرج [3,p15]، واثبت العالم Hardy أنه يوجد عدد غير منتهٍ من الأصفار لـ ζ واقعة على المستقيم الحرج [3,p26].

3_2 فرضية ريمان Riemann Hypothesis

عام 1859 نشر ريمان مقالته [7] " حول عدد الأعداد الأولية الأقل من عدد معطى"

والتي ترجمت من الألمانية إلى اللغة الإنكليزية من قبل David R. Wilkins كما ورد في المرجع [3,126]، حيث وضع ريمان في مقالته السابقة نتائجه حول أصفار التابع ζ غير البديهية وفرض أنها تملك جزءاً حقيقياً يساوي $\frac{1}{2}$ [3,p15]. ولكن نتائجه كانت بدون برهان كامل، لذا سمّيت بفرضية ريمان، وإلى يومنا هذا لا يوجد برهان لهذه الفرضية وهي تُعدّ واحدة من أهم المسائل المفتوحة في الرياضيات وأعقدها على الإطلاق.

2_4 تقريب تابع زيتا

نظراً لوجود العديد من خواص تابع زيتا الريماني التحليلية مجهولةً او بدون برهان، بالإضافة لوجود العديد من المسائل المفتوحة حول تابع زيتا الريماني، فإن إيجاد تقريب لتابع زيتا الريماني بتابع مألوف يُعدّ خطوة هامة في معرفة خصائص التابع في المستوي العقدي وبشكل خاص عند المستقيم الحرج.

ولعل أهم الأعمال حول تقريب تابع زيتا الريماني هو تعريف التابع-Riemann Siegel، حيث تم بناء عدة خوارزميات اعتماداً على التابع -Riemann Siegel منها الخوارزمية المعروضة في المقالة [6,P5] وخوارزمية -Odlyzko Schonhage، والتي تم من خلالها إيجاد اول 10^{13} صفر غير بديهي لتابع زيتا الريماني من قبل العالم Gourdon عام 2004 كما ورد في المرجع [8,p2]. حيث يتم من خلال الخوارزميات السابقة بتقريب المستقيم الحرج لتابع زيتا الريماني بالتابع الحقيقي Riemann-Siegel، أي يتم تقريب التابع $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ فقط حيث $t\in\mathbb{R}$، وليس التابع $\zeta(s)$ حيث $s\in\mathbb{C}$.

عرضت المقالة [1,p1,2] تقريباً محلياً لتابع زيتا الريماني على الساحة العقدية بمتتالية من التوابع الكسرية كما يلي:

من اجل $m \geq 0$ ، عرّفت الحدودية:

$$P_m(t) = (1-t)\left(1-\frac{t}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{t}{m}\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{t}{j}\right)$$

ولتكن $(-1)^j a_{m,j}$ حيث $j = 0, \ldots m$ معاملات $P_m(t)$ بعد النشر، أي:

$$P_m(t) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j a_{m,j} t^j$$

وعُرف التابع:

$$F_m(s) = \sum_{j=0}^{m}\frac{a_{m,j}B_j}{s+j-1}$$

حيث B_j هي أعداد برنولي، والتي تُعطى من خلال النشر:

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{B_j}{j!}z^j$$

حيث $B_1 = -\frac{1}{2}$ ، $B_0 = 1$.

وعُرف أيضاً التابع:

$$G_m(s) = \sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j a_{m,j}}{s+j-1}$$

إنّ التقريب الكسري من المرتبة m لتابع زيتا الريماني يُعطى بالعلاقة:

$$Z_m(s) = \frac{F_m(s)}{G_m(s)(s-1)}$$

على سبيل المثال من أجل $m = 3$:

$$F_3(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{11}{12s} + \frac{1}{6(s+1)} = \frac{3s^2+10s+11}{12(s-1)s(s+1)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{11}{6s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6(s+2)} = \frac{s^2+6s+11}{3(s-1)s(s+1)(s+2)}$$

وتم في المقالة [1,p16] دراسة تقارب Z_m من ζ وتم اثبات التقارب بانتظام في المنطقة $Re(s) > 0$ (ما عدا النقطة $s = 1$) عندما $m \to +\infty$ مع تخمين أن التقارب صحيح على كامل المستوي العقدي [1,p16].

ويكون $Z_m\left(\frac{1}{2} + it\right)$ تقريباً جيداً لتابع زيتا الريماني $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ عندما $|t| < \frac{2}{\pi}\ln m$ [1,p23].

على الرغم من التقارب المنتظم، إلا أنه وجدنا بالنتائج العددية والحسابات الرقمية أنّ هذا الطريقة في التقريب بطيئة جداً في الحصول على تقريب لأصفار تابع زيتا الريماني في المستقيم الحرج، حيث نعلم أن أول صفر لتابع زيتا على المستقيم الحرج هو $0.5 + 14.13473i$ والصفر الثاني لتابع زيتا على المستقيم الحرج هو: $0.5 + 21.02204i$ (الجزء التخيلي مقرب لأقرب خمس أرقام عشرية بعد الفاصلة) [5, p680].

ومنه فإن تقريب أول صفر للتابع زيتا الريماني عند المستقيم الحرج باستخدام التابع Z_m ضمن المجال الذي يُعطي نتائج جيدة [1,p 23] يكون من أجل $\frac{2}{\pi}\mathrm{Ln}\, m \geq 14.13473$ أي عندما $m \geq 1376047$.

وتقريب ثاني صفر للتابع زيتا الريماني عند المستقيم الحرج باستخدام التابع Z_m يكون من أجل $\frac{2}{\pi}\mathrm{Ln}\, m \geq 21.02204$ أي عندما $m \geq 13482046276$.

مثال (1)

من أجل $m = 5$، يكون:

$$P_5(s) = (1-s)\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(1-\frac{s}{3}\right)\left(1-\frac{s}{4}\right)\left(1-\frac{s}{5}\right)$$
$$P_5(s) = 1-\frac{137}{60}s+\frac{15}{8}s^2-\frac{17}{24}s^3+\frac{1}{8}s^4-\frac{1}{120}s^5$$

و:

$$F_5(s) = \frac{1}{s-1}-\frac{137}{120s}+\frac{5}{16(1+s)}-\frac{1}{240(3+s)}$$

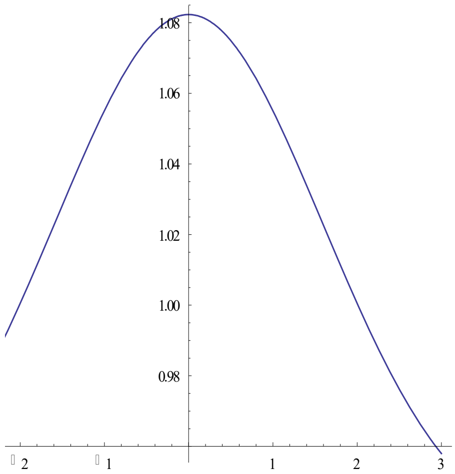
و:

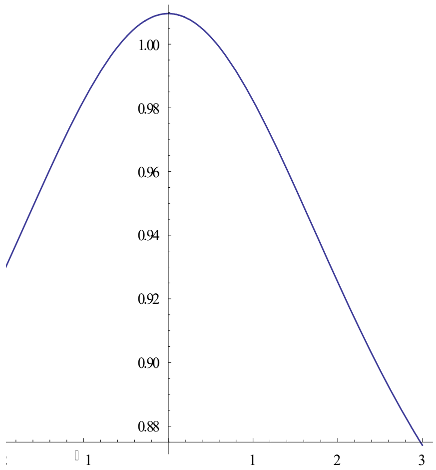
$$G_5(s) = \frac{1}{s-1}-\frac{137}{60s}+\frac{15}{8(1+s)}-\frac{17}{24(2+s)}+\frac{1}{8(3+s)}-\frac{1}{120(4+s)}$$

ومنه فإن:

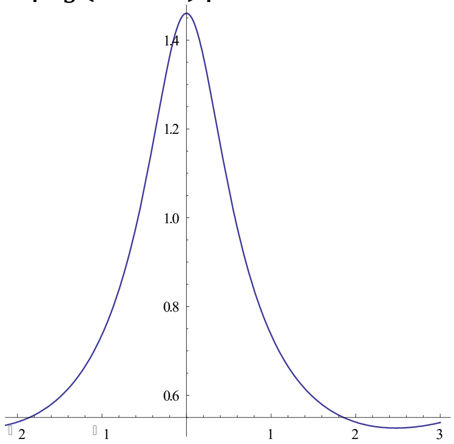
$$Z_5(s) = \frac{\frac{1}{-1+s}-\frac{137}{120s}+\frac{5}{16(1+s)}-\frac{1}{240(3+s)}}{(s-1)\left(\frac{1}{s-1}-\frac{137}{60s}+\frac{15}{8(1+s)}-\frac{17}{24(2+s)}+\frac{1}{8(3+s)}-\frac{1}{120(4+s)}\right)}$$

قمنا برسم الأشكال (1) والتي لاحظنا من خلالها تقارب Z_5 من التابع زيتا الريماني على مجالات حقيقية متعددة من خلال الرسم البياني، وذلك لصعوبة المقارنة البيانية من أجل مجالات عقدية.

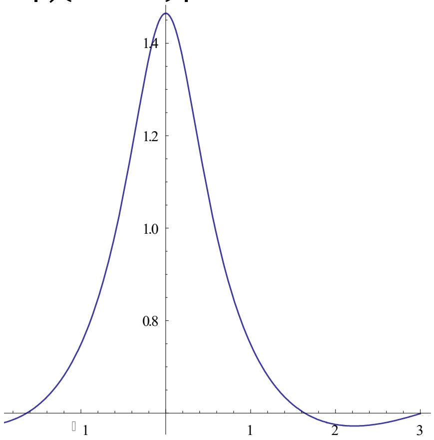




$|Z_5(4+it)|\ ;\ -3 \leq t \leq 3$

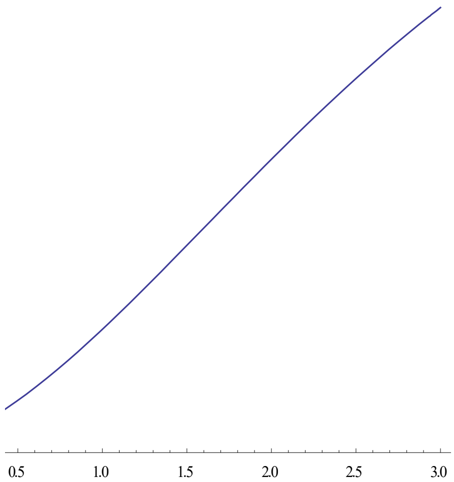


$|\zeta(4+it)|\ ;\ -3 \leq t \leq 3$

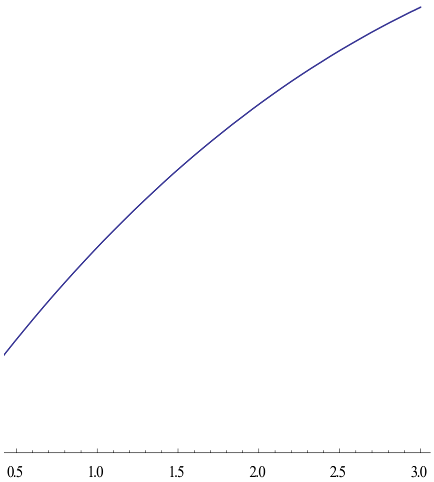


$\left|Z_5\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\ ;\ -3 \leq t \leq 3$

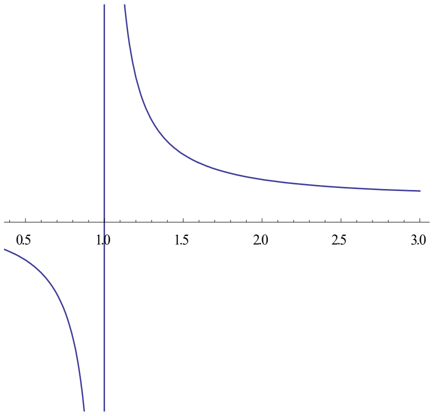
$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|\ ;\ -3 \leq t \leq 3$



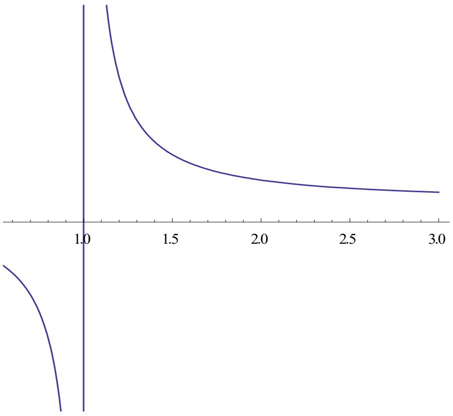
$|Z_5(x+5i)|\ ;\ 0 \leq x \leq 3$



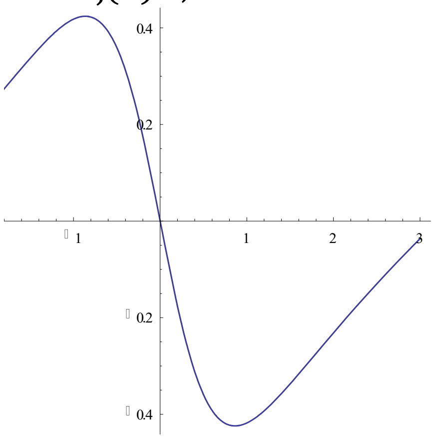
$|\zeta(x+5i)|\ ;\ 0 \leq x \leq 3$



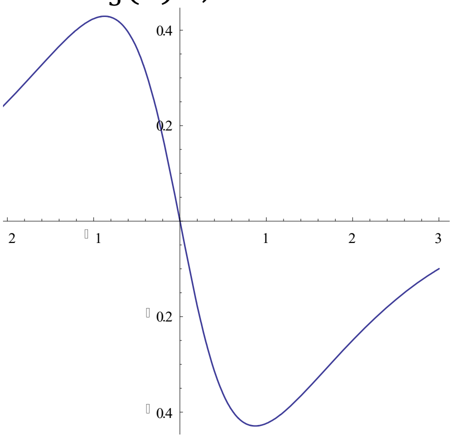
$\zeta(x) \ ; 0 \le x \le 3$



$Z_5(x) \ ; 0 \le x \le 3$



$\text{Im}\big(\zeta(it)\big) \ ; -3 \le t \le 3$



$Im\big(Z_5(it)\big) \ ; -3 \le t \le 3$

الأشكال (1)

5_2 تعريف تابع التقريب Z_m^n

قمنا في هذه المقالة بتعديل على تعريف التابع Z_m بإضافة وسيط n كما يلي:
بتعريف حدودية من المرتبة $N = m + n$ كما يلي:

$$P_N(t) = (1-t)\left(1-\frac{t}{2}\right)\dots\left(1-\frac{t}{m+n}\right) = \prod_{j=1}^{m+n}\left(1-\frac{t}{j}\right)$$

ولتكن $(-1)^j a_{m+n,j}$ حيث $j = 0,\dots,N$ معاملات $P_N(t)$ أي:

$$P_N(t) = \sum_{j=0}^{N}(-1)^j a_{m,j} t^j$$

ولنأخذ أول m معاملاً من معاملات $P_N(t)$. ولنعرف التابعين:

$$F_m^n(s) = \sum_{j=0}^{m}\frac{a_{N,j}B_j}{s+j-1}$$

$$G_m^n(s) = \sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j a_{N,j}}{s+j-1}$$

وسنقوم فيما يلي بدراسة تقارب التابع الكسري من المرتبة m التالي:

$$Z_m^n(s) = \frac{F_m(s)}{G_m(s)(s-1)}$$

من تابع زيتا الريماني.

مثلاً من أجل $m = 3; n = 2$ نجد:

من أجل $m = 5$، يكون:

$$P_{3+2}(s) = (1-s)\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(1-\frac{s}{3}\right)\left(1-\frac{s}{4}\right)\left(1-\frac{s}{5}\right) =$$

$$P_5(s) = 1-\frac{137}{60}s+\frac{15}{8}s^2-\frac{17}{24}s^3+\frac{1}{8}s^4-\frac{1}{120}s^5$$

وبأخذ المعاملات:

$$1,\frac{137}{60},\frac{15}{8},\frac{17}{24}$$

يكون:

$$F_3^2(s) = \frac{1}{-1+s}-\frac{137}{120s}+\frac{5}{16(1+s)}$$

و:

$$G_3^2(s) = \frac{1}{-1+s}-\frac{137}{60s}+\frac{15}{8(1+s)}-\frac{17}{24(2+s)}$$

ومنه فإن:

$$Z_3^2(s) = \frac{\frac{1}{-1+s} - \frac{137}{120s} + \frac{5}{16(1+s)}}{(s-1)\left(\frac{1}{-1+s} - \frac{137}{60s} + \frac{15}{8(1+s)} - \frac{17}{24(2+s)}\right)}$$

3 النتائج والمناقشة

وسنبين فيما يلي بالنتائج العددية أن التقريب باستخدام Z_m^n أفضل من التقريب باستخدام Z_m.

3_2 التقريب في مستطيل ضمن المستوي العقدي

لندرس التقارب في نصف المستوي العقدي $Re(s) > 0$ ما عدا النقطة $s = 1$.

وبدون مساس للعمومية سنقوم بدراسة الخطأ في المنطقة:

$D = \{x + iy : \ 0 \leq x < 1 \ \vee 1 < x \leq 5 \ \ , -5 \leq y \leq 5 \ \}$.

وليكن ||.|| نظيم الفضاء $C[D]$ فضاء التوابع المستمرة في المنطقة D [2,P1].

والقيم في الجدول (1) هي:

$$\|Z_m^n(s) - \zeta(s)\| = max_{s \in D}|Z_m^n(s) - \zeta(s)|$$

وعندما $n = 0$ تكون القيمة الموافقة في الجدول (1) هي:

$$\|Z_m(s) - \zeta(s)\| = max_{s \in D}|Z_m(s) - \zeta(s)|$$

أي القيم في الجدول (1) هي مقدار الخطأ المرتكب في التقريب لأجل قيم مختلفة لـn, m .

وتم حساب قيم الخطأ باستخدام المقطع البرمجي التالي:

```
In[23]:= m = 15; n = 3; A := Table[Abs[CoefficientList[∏_{i=1}^{m+n} (1 - t/i), t][[j]]], {j, 1, m + 1}];

F[t_] := ∑_{j=0}^{m} (A[[j + 1]] * BernoulliB[j]) / (t + j - 1);

G[t_] := ∑_{j=0}^{m} (A[[j + 1]] * (-1)^j) / (t + j - 1);

Z[t_] := F[t] / (G[t] * (t - 1));

NMaximize[{Abs[Z[x + y * I] - Zeta[x + y * I]], 0 < x ≤ 5 && -5 ≤ y ≤ 5 }, {x, y}][[1]]

Out[27]= 0.213321
```

الجدول (1)

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 10$	$n = 15$	$n = 25$
$m = 10$	0.2474	0.2412	0.2357	0.2309	0.2267	0.2228	0.2069	0.1900	0.0824
$m = 11$	0.2412	0.2357	0.2309	0.2267	0.2229	0.2194	0.2057	0.1960	0.1897
$m = 12$	0.2357	0.2309	0.2267	0.2229	0.2194	0.2162	0.2033	0.193	0.1733
$m = 13$	0.2309	0.2267	0.2229	0.2194	0.2162	0.2133	0.2011	0.1913	0.1741
$m = 14$	0.2267	0.2229	0.2194	0.2162	0.2133	0.2105	0.1991	0.1894	0.1719
$m = 15$	0.2229	0.2194	0.2162	0.2133	0.2105	0.2080	0.1970	0.1876	0.1703
$m = 16$	0.2194	0.2162	0.2133	0.2105	0.2080	0.2056	0.1950	0.1858	0.1686
$m = 17$	0.2162	0.2133	0.2105	0.2080	0.2056	0.2033	0.1931	0.1840	0.1668
$m = 18$	0.2133	0.2105	0.2080	0.2056	0.2033	0.2011	0.1912	0.1823	0.1651

0.1634	0.1806	0.1894	0.1990	0.2011	0.2033	0.2056	0.2080	0.2105	$m = 19$
0.1617	0.1788	0.1876	0.1970	0.1990	0.2011	0.2033	0.2056	0.2080	$m = 20$
0.1532	0.1703	0.1788	0.1876	0.1894	0.1912	0.1931	0.1950	0.1970	$m = 25$
0.1449	0.1617	0.1703	0.1788	0.1806	0.1823	0.1841	0.1858	0.1876	$m = 30$
0.1144	0.1289	0.1367	0.1449	0.1465	0.1482	0.1499	0.1516	0.1532	$m = 50$
0.0665	0.0733	0.0771	0.0813	0.0822	0.0831	0.0840	0.0849	0.0858	$m = 100$

نلاحظ من الجدول (1) ما يلي:

1_ من أجل m مثبتة و n متغيرة ، نلاحظ تناقص الخطأ بازدياد n.

2_ من اجل n مثبتة و m متغيرة ، ليس من الضروري تناقص او تزايد الخطأ بازدياد m (لاحظ العمود $n = 15$ والعمود $n = 25$).

3_نلاحظ تقارب قيمة الخطأ عند $m = a,\ n = b$ من قيمة الخطأ عند $m = a - 1, n = b + 1$.

ولاحظنا أيضاً أثناء حساب القيم في الجدول (1) أنّ التعقيد الحسابي والزمن اللازم للحصول على تابع التقريب عند m كبيرة نسبياً و$n = 0$ يكون أكبر عند n كبيرة نسبياً و m صغيرة. وذلك لأن عدد الحدود في التقريب يعتمد على قيمة m ومنه بازدياد m يزداد التعقيد الحسابي.

على سبيل المثال: الزمن اللازم لبناء التابع Z_{100} هو 794.68469 ثانية، والزمن اللازم لبناء التابع Z_{10}^{25} هو 0.4992 ثانية. بالإضافة إلى أن الخطأ

الناتج عن التقريب باستخدام التابع Z_{100} أكبر من الخطأ الناتج عن التقريب باستخدام التابع Z_{10}^{25}.

وأيضاً الزمن اللازم لبناء التابع Z_{35} هو 1.531 ثانية، وهو أكبر من الزمن اللازم لبناء التابع Z_{10}^{25}. بالإضافة إلى أن الخطأ الناتج عن التقريب باستخدام التابع Z_{35} هو 0.17887 وهو أكبر من الخطأ الناتج عن التقريب باستخدام التابع Z_{10}^{25}.

حيث تم حساب الزمن باستخدام تعليمة Timing في برنامج الماثماتيكا.

3_3 التقريب على المستقيم الحرج

سنقوم بمقارنة التقريب $Z_m(s)$ والتقريب $Z_m^n(s)$ لتابع زيتا الريماني عندما $s = \frac{1}{2} + it$ أي عن المستقيم الحرج وذلك في المجال الذي يعطي تقريباً جيداً للتابع وهو $|t| < (2/\pi)\ln m$ [1,P23]. حيث القيم في الجدول (2) هي:

$$\left\|Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\| = max_{|t|<(2/\pi)\text{Ln } m]}\left|Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$$

وعندما $n = 0$ تكون القيمة الموافقة في الجدول هي:

$$\left\|Z_m\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\| = max_{|t|<(2/\pi)\text{Ln } m]}\left|Z_m\left(\frac{1}{2}+it\right)-\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$$

حيث $\|.\|$ هو نظيم الفضاء $C[-(2/\pi)\text{Ln } m, (2/\pi)\text{Ln } m]$.

والقيم في الجدول (2) مقربة لأقرب خمس منازل عشرية بعد الفاصلة.

وتم حساب القيم في الجدول (2) من خلال المقطع البرمجي التالي:

```
In[11]:= m = 20 ; n = 10; A := Table[Abs[CoefficientList[∏_{i=1}^{m+n} (1 - t / i) , t][[j]]], {j, 1, m + 1}];

F[t_] := ∑_{j=0}^{m} (A[[j + 1]] * BernoulliB[j]) / (t + j - 1);

G[t_] := ∑_{j=0}^{m} (A[[j + 1]] * (-1) ^ j) / (t + j - 1);

Z[t_] := F[t] / (G[t] * (t - 1));

NMaximize[{Abs[Z[1 / 2. + x * I] - Zeta[1 / 2. + x * I]], - (2 / Pi) * Log[m] ≤ x < (2 / Pi) * Log[m] }, {x}][[1]]

Out[15]= 0.00387831
```

الجدول (2)

$n = 25$	$n = 15$	$n = 10$	$n = 5$	$n = 4$	$n = 3$	$n = 2$	$n = 1$	$n = 0$	
0.0018	0.0026	0.0036	0.0052	0.0058	0.0064	0.0071	0.0079	0.0090	$m = 10$
0.0017	0.0027	0.0036	0.0052	0.0057	0.0062	0.0069	0.0077	0.0086	$m = 11$
0.0018	0.0028	0.0037	0.0052	0.0056	0.0061	0.0067	0.0074	0.0082	$m = 12$
0.0019	0.0029	0.0037	0.0052	0.0056	0.0060	0.0066	0.0072	0.0079	$m = 13$
0.002	0.0029	0.0038	0.0051	0.0055	0.0059	0.0064	0.0070	0.0077	$m = 14$
0.0020	0.0038	0.0036	0.0051	0.0054	0.0058	0.0063	0.0068	0.0074	$m = 15$
0.0021	0.0030	0.0038	0.0050	0.0054	0.0057	0.0062	0.0067	0.0072	$m = 16$
0.0021	0.0030	0.0038	0.0050	0.0053	0.0057	0.0061	0.0065	0.0070	$m = 17$
0.0022	0.0031	0.0038	0.005	0.0053	0.0056	0.0059	0.0064	0.0068	$m = 18$
0.0022	0.0031	0.0038	0.0049	0.0052	0.0055	0.0058	0.0062	0.0067	$m = 19$
0.0022	0.0031	0.0038	0.0049	0.0051	0.0054	0.0058	0.0061	0.0065	$m = 20$

$m = 25$	0.0059	0.0056	0.0054	0.0051	0.0049	0.0047	0.0038	0.0032	0.0024
$m = 30$	0.0055	0.0053	0.0050	0.0048	0.0047	0.0045	0.0038	0.0032	0.0025
$m = 50$	0.0045	0.0044	0.0043	0.0042	0.0041	0.0040	0.0036	0.0032	0.0027
$m = 100$	0.0035	0.0035	0.0035	0.0034	0.0034	0.0033	0.0031	0.0030	0.0027

نلاحظ من الجدول (2) ما يلي:

1_ من أجلm مثبتة و n متغيرة ، نلاحظ تناقص الخطأ بازدياد n .

2_ من اجل n مثبتة و m متغيرة، ليس من الضروري تناقص او ازدياد الخطأ بازدياد m (لاحظ العمود $n = 15$ والعمود $n = 25$).

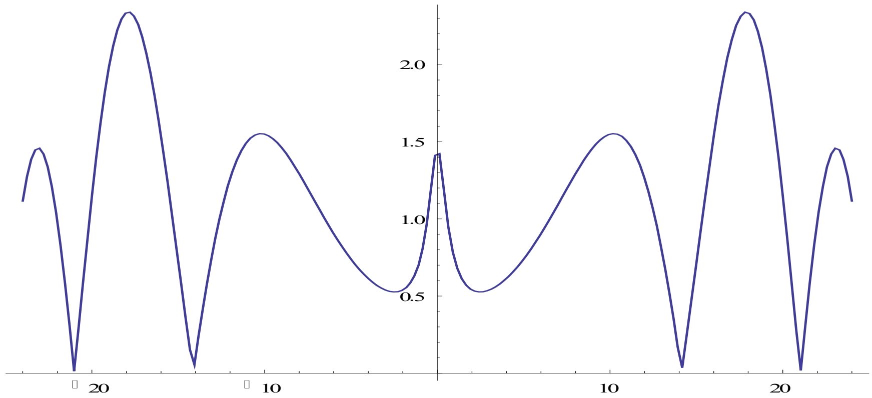
وأيضاً لاحظنا أثناء حساب القيم في الجدول (2) أنّ التعقيد الحسابي والزمن اللازم للحصول على تابع التقريب عند m كبيرة نسبياً و$n = 0$ يكون أكبر عند n كبيرة نسبياً و m صغيرة.

فمثلاً الزمن اللازم لبناء التابع Z_{100} حاسوبياً هو845.104217 ثانية. والزمن اللازم لبناء التابع Z_{10}^{15} حاسوبياً هو 0.218402 ثانية. بالإضافة إلى أن الخطأ الناتج عن التقريب باستخدام Z_{100} أكبر من الخطأ الناتج عن التقريب باستخدام Z_{10}^{15}.

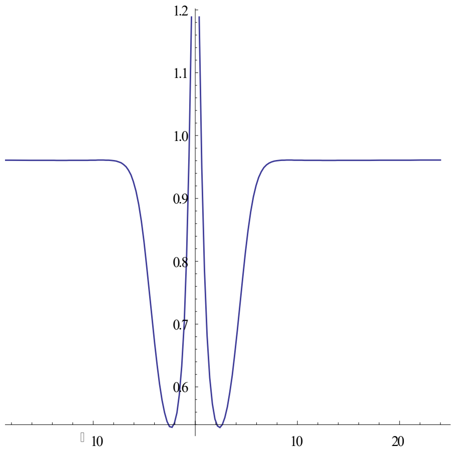
3_3_1 التقريب على مجال أكبر على المستقيم الحرج

قمنا برسم الأشكال (2) طويلتي تابعي التقريب Z_n و Z_n^m من أجل n, m مختلفة على المجال $[-24,24]$.

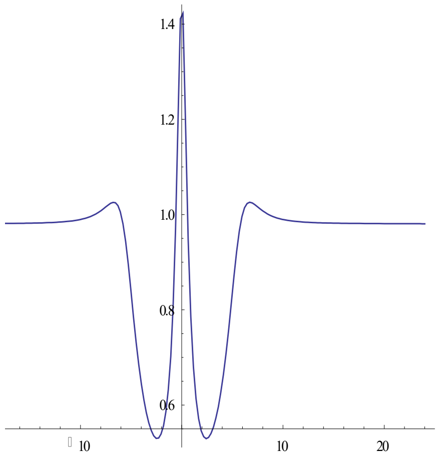
وذلك بهدف المقارنة بين مجال تقارب كل من Z_n و Z_n^m، ولاحظنا أن المجال الذي يتقارب فيه Z_n^m من ζ أكبر من مجال تقارب Z_n من ζ.



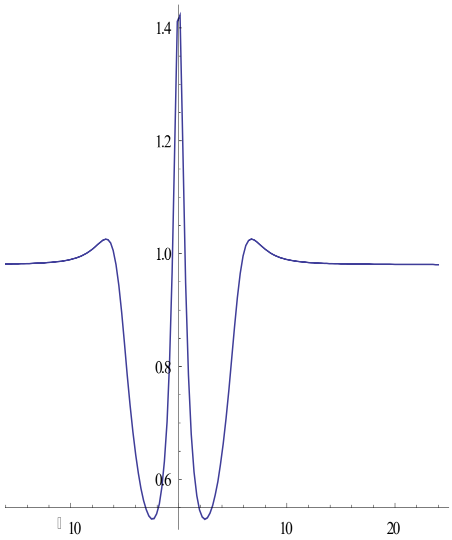
$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right| : t \in [-24,24]$



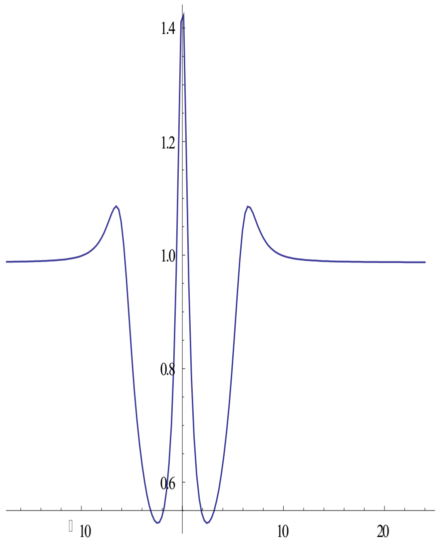
$\left|Z_{25}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$



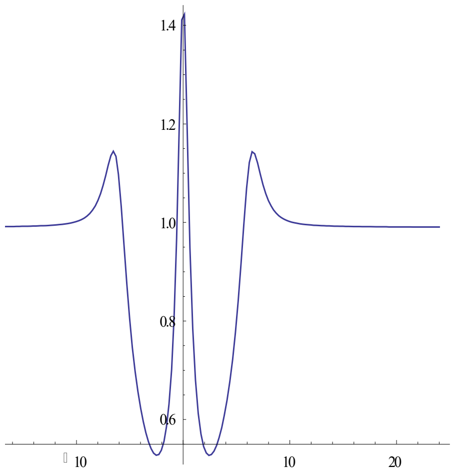
$\left|Z_{25}^{25}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$



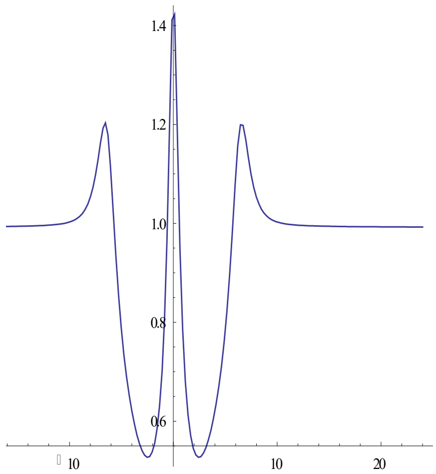
$\left|Z_{50}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$



$\left|Z_{50}^{25}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$



$\left|Z_{100}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$



$\left|Z_{100}^{25}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$

الأشكال (2)

والجدول (3) يوضح تقارب Z_m^n من التابع ζ على المستقيم الحرج في المجال:

$$D_m^n = [-(2/\pi)\text{Ln}\,(m+n), +(2/\pi)\text{Ln}\,(m+n)]$$

حيث القيم في الجدول (3) الآتي هي:

$$\left\| Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\| = max_{t\in D_m^n}\left| Z_m^n\left(\frac{1}{2}+it\right) - \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$$

حيث ||.|| هو نظيم الفضاء $C[D_m^n]$.

وتم حساب القيم من خلال المقطع البرمجي التالي:

```
In[33]:= m = 10; n = 20; A := Table[Abs[CoefficientList[∏_{i=1}^{m+n} (1 - t/i), t][[j]]], {j, 1, m+1}];

F[t_] := ∑_{j=0}^{m} (A[[j+1]] * BernoulliB[j]) / (t + j - 1);

G[t_] := ∑_{j=0}^{m} (A[[j+1]] * (-1)^j) / (t + j - 1);

Z[t_] := F[t] / (G[t] * (t - 1));

NMaximize[{Abs[Z[1/2. + x*I] - Zeta[1/2. + x*I]], -(2/Pi)*Log[m+n] ≤ x < (2/Pi)*Log[m+n]}, {x}][[1]]

Out[37]= 0.00558393
```

الجدول (3)

	$n=10$		$n=20$		$n=30$	
	خطأ التقارب باستخدام Z_m في المجال D_m^{10}	خطأ التقارب باستخدام Z_m^{10} في المجال D_m^{10}	خطأ التقارب باستخدام Z_m في المجال D_m^{20}	خطأ التقارب باستخدام Z_m^{20} في المجال D_m^{20}	خطأ التقارب باستخدام Z_m في المجال D_m^{30}	خطأ التقارب باستخدام Z_m^{30} في المجال D_m^{30}
$m=10$	0.00791	0.00656	0.02123	0.00558	0.02607	0.00544
$m=25$	0.00792	0.0052	0.00975	0.00472	0.0115	0.00438
$m=50$	0.00533	0.00425	0.0061	0.00403	0.00685	0.00385
$m=75$	0.0044	0.00378	0.00487	0.00364	0.00532	0.00352
$m=100$	0.0039	0.00347	0.00423	0.00339	0.00455	0.0033

نلاحظ من الجدول (3) ما يلي:

1_ تزايد قيمة الخطأ باستخدام Z_m في المجال D_m^n عند m مثبتة و n متغيرة، أي يزداد خطأ التقريب باستخدام Z_m عندما يصبح المجال D_m^n أكبر.

2_ تناقص قيمة الخطأ باستخدام Z_m^n في المجال D_m^n عند m مثبتة و n متغيرة، أي تناقص خطأ التقريب باستخدام Z_m^n عندما يصبح المجال D_m^n أكبر.

3_ نلاحظ أن قيمة خطأ التقريب باستخدام Z_m^n أقل من قيمة خطأ التقريب باستخدام Z_m في المجال D_m^n عند m,n مثبتتان.

4_ تناقص قيمة الخطأ باستخدام Z_m و Z_m^n في المجال D_m^n عند n مثبتة و m متغيرة.

ومنه نلاحظ أن التابع Z_m^n يعطي تقريباً ذا دقة أكبر وفي مجال أكبر من التابع Z_m، حيث مرتبة التقريب m مثبتة.

REFERENCES

[1] Ball, K., 2017. Rational approximations to the zeta function. *arXiv preprint arXiv:1706.07998*.

[2] Blecher, D., 1997. Continuous functions on compact groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *125*(4), pp.1177-1185.

[3] Borwein, P., Choi, S., Rooney, B. and Weirathmueller, A. eds., 2008. *The Riemann hypothesis: a resource for the afficionado and virtuoso alike* (Vol. 27). Springer Science & Business Media.

[4] Ivic, A., 2012. *The Riemann zeta-function: theory and applications*. Courier Corporation.

[5] Kölbig, K.S., 1970. Complex zeros of an incomplete Riemann zeta function and of the incomplete gamma function. Mathematics of Computation, 24(111), pp.679-696.

[6] Odlyzko, A.M., 1989. Supercomputers and the Riemann zeta function. In *Supercomputing* (Vol. 89, pp. 348-352).

[7] *Riemann, B., 1859. On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity.(Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.). Monatsberichte der Berliner Akademie.*

[8] Tihanyi, N., Kovács, A. and Kovács, J., 2017. Computing extremely large values of the Riemann zeta function. *Journal of Grid Computing*, *15*(4), pp.527-534.

لمزيد من الفائدة والاطلاع:

[9] *Ball, K.M., 2018. Rational approximations to the zeta function II. arXiv preprint arXiv:1810.01613.*