مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 41–عدد 4 (2025): 90– 112

Damascus University Journal for the Basic Sciences
Vol 41 No.4 (2025): 90 -112

دراسة لإيجاد العدد اللوني الضلعي المستمر وخوارزمية تلوين البيانات $PP_{n,m}$

فاروق صبحي الحاج[1]   د. نايف علي طلـــي[2]

[1] طالب ماجستير، قسم الرياضيات كلية العلوم، جامعة دمشق، سوريا.
Farouk.alhajj@damascusuniversity.edu.sy
[1] أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة دمشق – سوريا.
nay'if.tali@damascusuniversity.edu.sy

الملخص

كما هو معروف فإن مسألة تلوين البيان بأقلَّ عدد من الألوان مسألة معقّدة من الصف NP، وتتلخص في كيفيّة تلوين عقد بيان بأقلَّ عدد من الألوان بحيث لا يُخصّص لأيِّ عقدتين متجاورتين اللون نفسه أو كيف يتمُّ تلوين أضلاع بيان بأقلَّ عدد من الألوان بحيث لا يكون لأيِّ ضلعين متجاورين اللون نفسه، ولأنَّ تلوين الأضلاع لا يعطي دوماً التلوين المناسب المُمثل لحلَّ مشكلة ما ظهرت مسألة الحصول على التلوين الضلعي المستمر، وقد تمَّ أخذ هذه المسألة من مسألة مفتوحة لم تُدرس مسبقاً [1]. وانطلاقاً من كونها مسألة مفتوحة واستكمالاً للبحث في هذا المجال، قدّمنا في هذه الورقة البحثيّة دراسة جديدة تتضمن دراسة تلوين البيانات $PP_{n,m}$ في البداية قمنا بإنتاج البيانات $PP_{n,m}$ باستعمال الجداء الديكارتي للمسارين P_n و P_m ثمَّ قمنا بدراسة تلوين هذه البيانات ابتداءً من التلوين الضلعي المستمر، دراستنا تكون وفق ثلاثَ حالات حسب مرتبة كلّا من P_n و P_m كلّ حالة تتضمّن وضع خوارزمية التلوين الضلعي المستمر الأمثل، وتحديد الصيغة العامة للعدد اللوني الضلعي المستمر بشكل دقيق، وعرض بعض الأمثلة التوضيحية بالإضافة إلى برهان قابلية تحقيق البيانات $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر، ثمَّ توصلنا إلى نتائج يمكن من خلالها تصنيف هذه البيانات من حيث قابليتها للتلوين الضلعي المستمر بشكل مباشر، فضلاً عن وضع الصيغة العامة للعدد اللوني الضلعي المستمر للبيان $PP_{n,m}$ ككل حسب مرتبته nm، انتقلنا بعد ذلك لدراسة تلوين الأضلاع حيث قمنّا باستنتاج العدد اللوني اللازم لتلوين الأضلاع، بالإضافة إلى دراسة تلوين العقد حيث اقترحنا خوارزمية التلوين وتمكنّا من وضع العدد اللوني اللازم لتلوين العقد واختتمنا البحث ببعض الأمثلة التوضيحية، وبهذه الحالة أصبح لدينا دراسة متكاملة تتضمن تطبيق جميع أنواع التلوين على البيانات $PP_{n,m}$.

تاريخ الإيداع: 2024/02/06
تاريخ الموافقة: 2024/04/23

الكلمات المفتاحية: البيان، المسار، الجداء الديكارتي لمسارين، مسألة تلوين البيان، تلوين عقد بيان، تلوين أضلاع بيان، التلوين الضلعي المستمر، العدد اللوني الضلعي المستمر، خوارزمية تلوين البيان.

ISSN (online): 2789-6366
http://journal.damascusuniversity.edu.sy/index.php/index/index

A Study to Find the Continuous Edge Chromatic Number and Coloring Algorithm for Graphs $PP_{n,m}$

Farouk Sobhi Al Hajj[1] Nay'if Ali Tali[2]

[1]Master Student, Mathematics Department, Faculty of Science, Damascus University, Syria. Farouk.alhajj@damascusuniversity.edu.sy

[2] Associate professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Damascus University, Syria nay'if.tali@damascusuniversity.edu.sy

Received :06/02/2024
Accepted: 23/04/2024

Abstract

It is well known that the matter of Graph colouring using the least number of colours is considered a complex Problem from the NP class, and it is summarized in how to colour the vertices of a Graph using the least number of colours, where no two adjacent vertices are assigned the same colour, or how the edges of a graph are coloured using the least number of colours where no two adjacent edges are assigned the same colour.

the matter of obtaining continuous Edge colouring emerged because colouring edges does not always present the proper colouring that represents the solution to a certain problem. this matter was taken from an open matter that was not previously worked on [1].

Since the Continuous Edge Chromatic matter is an open matter, and to pursue the academic research in this field, we presented in this research paper a new study that includes the study of colouring for Graphs $PP_{n,m}$.

First, we produced graphs $PP_{n,m}$ using the Cartesian product of the two paths P_n and P_m , then, we studied colouring these Graphs starting with the continuous Edge colouring.

Our study covers three cases according to the order of the Graphs P_n and P_m. Each case involves setting the algorithm of optimal continuous Edge colouring and finding the general formula of continuous Edge chromatic number precisely and viewing some explanatory examples as well as proving the possibility of applying the continuous Edge colouring to Graphs $PP_{n,m}$.

Then, we concluded findings, through which, we can classify these graphs in terms of its probability to continuous Edge colouring directly, let alone find the general formula of continuous Edge chromatic number for Graphs $PP_{n,m}$ in general according to its order nm.

Then we moved to study colouring the edges where we concluded the chromatic number needed to colour the edges, as well as colouring the vertices as we suggested colouring algorithm and we managed to find the required the chromatic number needed to colour the vertices, and we concluded the research with some explanatory examples. In this case we had a comprehensive study that includes the application of all types of colouring on graphs $PP_{n,m}$.

Keywords: Graph, Walk, Cartesian Product of two walks, Graph Colouring, Vertex Colouring, Edge Colouring, Continuous Edge Colouring, Continuous Edge chromatic number, Graph Colouring Algorithm.

1) مقدمة:

إنَّ لنظرية البيان دوراً كبيراً في حل الكثير من المسائل ومن المعروف أنَّ لها تطبيقات في مختلف المجالات العلمية (الطب والبيولوجيا والفيزياء والكمياء وفي تقنيات الحاسوب ...) كما أنَّ هذه النظرية وثيقة الصلة بكثير من المجالات الرياضية منها: نظرية الألعاب، نظرية المصفوفات، التحليل العددي، ... الخ، ويُعد تلوين البيان أحد المواضيع الهامة المطروحة في نظرية البيان.

بدأت مسألة تلوين البيان بمحاولة حل مسألة الألوان الأربعة التي ظهرت في عام 1852م حيث وضع فرانسيس غوثيري فرضية الألوان الأربعة خلال محاولته تلوين مقاطعات إنكلترا، وتعتمد هذه الفرضية في فكرتها على إنَّ أي خريطة يمكن تلوينها بأربعة ألوان فقط بحيث لا يُخصص لأي منطقتين متجاورتين في الخريطة اللون نفسه[11] [14] [15] وأصبح تلوين البيانات بعد ذلك موضوعاً في غاية الأهمية، وذلك بسبب نتائجه النظرية وتطبيقاته المتعددة، وفي عام 1876 عمل كلاً من العلماء Wolfgang Haken, Kenneth Apple على تخفيض عدد الألوان إلى أن تم إيجاد حل لهذه المسألة حاسوبياً [3] [4] [7] [12].

تتلخص مسألة تلوين البيان في كيفية تلوين عقد بيان بأقل عدد من الألوان بحيث لا يخصص لأي عقدتين متجاورتين اللون نفسه أو كيف يتم تلوين أضلاع بيان بأقل عدد من الألوان بحيث تُلون الأضلاع المتجاورة بألوان مختلفة ولأن تلوين الأضلاع لا يعطي دوماً التلوين المناسب الممثل لحل مشكلة ما ظهرت مسألة الحصول على التلوين الضلعي المستمر وهي تتبنى فكرة تلوين أضلاع بيان مع إضافة شرط جديد على الألوان يتعلق بالاستمرارية، وقد تم أخذ هذه المسألة من مسألة مفتوحة لم يُعمل بها مسبقاً [3] .

تمكن [1] من دراسة التلوين الضلعي المستمر للبيان ثنائي التجزئة التام $K_{P,q}$ وللدورات C_n والبيان التام K_n ولضيق أفق الدراسات السابقة في دراسة التلوين الضلعي المستمر لبيانات شهيرة فقط ولفتح المجال لدراسة تلوين بيانات مركبة من بيانات بسيطة سيكون موضوع دراستنا هو دراسة تلوين نوع جديد من البيانات لم تسبق دراستهُ من قبل وهو صف البيانات $PP_{n,m}$ حيث تم الحصول عليه باستعمال أحد طرق إنتاج البيانات وهي الجداء الديكارتي للمسارين P_n وP_m وسنقوم أولاً بدراسة التلوين الضلعي المستمر وسنناقش لأجل مرتبة البيان $PP_{n,m}$ ككل والتي تساوي nm من خلال ثلاثة حالات حسب مرتبة كلاً من P_n و P_m في كل حالة سنقوم باقتراح خوارزمية التلوين الضلعي المستمر، ووضع الصيغة العامة للعدد اللوني الضلعي المستمر بشكل دقيق، وإيراد بعض الأمثلة الشارحة للبحث بالإضافة إلى البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على قابلية تحقيق البيانات $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر، ثمَّ دراسة تلوين الأضلاع من خلال استنتاج العدد اللوني اللازم لتلوين الأضلاع، وأخيراً تناولنا دراسة تلوين العقد حيث قمنا بوضع خوارزمية التلوين والعدد اللوني اللازم لتلوين العقد مع تزويد الفصل بالعديد من الأمثلة الداعمة للبحث بغية الوصول إلى هدف بحثنا يتم البدء بعرض أهمية وهدف البحث في الفقرة (2) كما وسنقوم بعرض المفاهيم والمصطلحات الأساسية التي يمكن من خلالها مناقشة مسألة البحث في الفقرة (3) وأخيراً سنعرض النتائج والمناقشة التي تتضمن الخوارزميات والصيغ المقترحة والبراهين الموضوعة بالإضافة إلى أننا قمنا بإرفاق بعض الأمثلة التي توضح هذه الخوارزميات والصيغ العامة للعدد اللوني في الفقرة (4) ثمَّ سنختم البحث بمجموعة من الاستنتاجات والتوصيات في الفقرة (5).

2) أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في حقيقة أنَّ العديد من المسائل يتم تحليلها عبر نمذجة الحالة الموصوفة ببيان، ومن ثمَّ يتم إيجاد تلوين مناسب لهذا البيان لنحصل على حل للمسألة المطروحة، وانطلاقاً من التطبيقات العملية لتلوين البيان في مجالات مختلفة ولضرورة استخدام مفهوم التلوين الضلعي المستمر في إيجاد الحل الأمثل.

يهدف البحث إلى تقديم دراسة شاملة لتلوين نوع جديد من البيانات وهو $PP_{n,m}$ من خلال الخطوات التالية:

1) إنتاج نوع جديد من البيانات باستخدام الجداء الديكارتي للمسارين P_n و P_m.

2) تطبيق دراسة التلوين الضلعي المستمر على البيانات $PP_{n,m}$، واقتراح خوارزمية التلوين التي تُعطينا التلوين الضلعي المستمر الأمثل.

3) وضع الصيغة العامة للعدد اللوني الضلعي المستمر للبيان $PP_{n,m}$ ككل حسب مرتبته nm وإثبات هذه الصيغة.

4) البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على قابلية تحقيق البيانات $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر.

5) استنتاج العدد اللوني اللازم لتلوين الأضلاع بالإضافة إلى دراسة تلوين العقد حيث اقترحنا خوارزمية التلوين وتمكنًا من وضع العدد اللوني اللازم لتلوين العقد مع تزويد الفصل بالعديد من الأمثلة الداعمة للبحث.

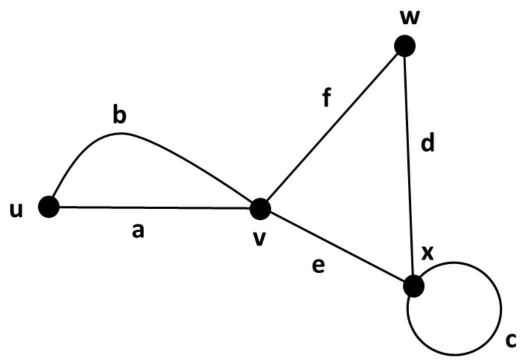
3) مفاهيم أساسية:

1.3. تعاريف ومصطلحات البحث [4] [6] [8] [9] [16]

قبل البدء بعرض مفاهيم البحث ننوه أنَّ دراستنا ستكون على البيانات البسيطة وغير الموجهة.

1.1.3. البيان (Graph): ليكن لدينا الثنائية G (V,E) حيث V مجموعة منتهية غير خالية من العناصر تدعى عقداً ومجموعة E قد تكون غير خالية من الثنائيات من عناصر V والتي تدعى أضلاعاً. تدعى V مجموعة عقد البيان وتدعى E مجموعة أضلاع البيان والشكل (1) يُعبر عن البيان G وتكون مجموعتي العقد والأضلاع كما يلي:

$E(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $V(G) = \{u, v, w, x\}$



الشكل (1) يمثل البيان G

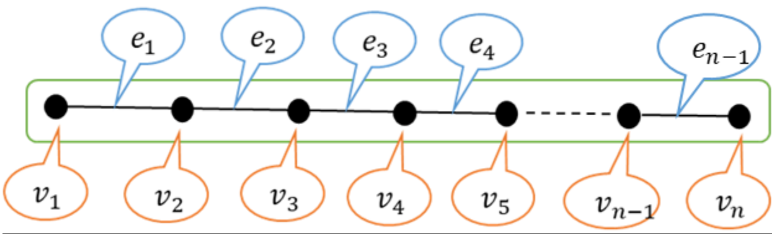
2.1.3. البيان البسيط Simple Graph:

نسمي البيان G=(V,E) بيان بسيطاً إذا كان لا يملك أضلاعاً مضاعفة ولا يملك عُرى كما في الشكل (1) هو بيان بسيط.

3.1.3. مرتبة بيان Order of Graph: عدد عقد البيان G يدعى مرتبة البيان G ونرمز له بالرمز n.

ليكن لدينا بيان $G = (V, E)$ بياناً وليكن $a, b \in V$ وليكن $n \geq 1$ عدداً صحيحاً عندئذٍ نعرف:

4.1.3. المسار (Walk): لتكن لدينا متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع [5]



الشكل (2) يمثل المسار P_n

$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{n-1}, v_n$ حيث: $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ و $v_1 = a$ و $v_n = b$ من أجل كل i عندها نسمي المتتالية السابقة مساراً من a إلى b ويرمز للمسار الذي يحوي n عقدة بالرمز P_n .

ويكون المسار من a إلى b ممراً إذا كان $v_i \neq v_j$ لأجل كل $i \neq j$ وإنه من غير الممكن تكرار العقد في الممر.

3.1.5.البيان ثنائي التجزئة (Bipartite Graph):

ليكن لدينا $G=(V,E)$ بياناً بسيطاً نقول عن البيان G إنه بيان ثنائي التجزئة إذا وجدت تجزئة ل V حيث $V = V_1 \cup V_2$ ويكون $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ حيث أنه من أجل أي ضلع e فإن الرأس الأول للضلع ينتمي إلى المجموعة V_1 والرأس الآخر ينتمي إلى المجموعة V_2 ويرمز له بالرمز $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

3.1.6. البيان ثنائي التجزئة التام (Complete Bipartite Graph):

ليكن $G=(V_1 \cup V_2, E)$ بياناً ثنائي التجزئة نقول عن G إنه بيان ثنائي التجزئة التام إذا كان كل عنصر في V_1 مجاور لكل عنصر في V_2 في هذه الحالة إذا $|V_1| = p$ و $|V_2| = q$ فإننا نرمز لهذا البيان بالرمز $K_{P,q}$.

3.1.7.الجداء الديكارتي لبيانين G و H (Cartesian Product of two Graph): [2]

الجداء الديكارتي (أو الجداء) لبيانين H و G يعطى بالبيان G×H حيث مجموعة عقده $V(G \times H)$ هي $V(G) \times V(H)$ وتكون مجموعة أضلاعه $E(G \times H) = E(G) \times V(H) \cup V(G) \times E(H)$ إنَّ نقاط نهاية الضلع (d,v) حيث $(d,v) \in E(G) \times V(H)$ تكون العقد (y,v) و (x,v) حيث x و y هي نقاط نهاية الضلع d حيث $d \in E(G)$ ونقاط نهاية الضلع (u,e) حيث $(u,e) \in V(G) \times E(H)$ تكون العقد (u,t) و (u,s) حيث t و s هي نقاط نهاية الضلع d حيث $e \in E(H)$.

3.2. تلوين البيانات (Colouring Graph): [10] [13] [9] [3]

تعد مسألة تلوين البيانات موضوعاً في غاية الأهمية وذلك بسبب نتائجها النظرية الواسعة ومسائلها غير المحلولة وتطبيقاتها المتعددة، وقد كان التوجه في بدايات مسألة تلوين البيان إلى تلوين عقد البيان.

3.2.1. تلوين عقد بيان (Vertex Colouring of Graph):

يقصد بتلوين عقد بيان هو تخصيص الألوان للعقد فيعطى لون واحد لكل عقدة بحيث يتم تلوين العقد المتجاورة بألوان مختلفة، ليكن لدينا بيان G وليكن لدينا $V(G)$ مجموعة كل العقد في G وليكن لدينا المجموعة $N=\{1,2,3,\dots,k\}$ وتمثل مجموعة كل الألوان التي نحتاجها لتلوين أي عقدة من البيان G إنَّ التلوين المناسب (الأمثل) يمكن أن يُعبر عنه بالدالة: $C:V(G) \longrightarrow N$ بحيث أنه من أجل أي عقديتين u و v متجاورتين في البيان G ستكون صورتهما وفق التلوين مختلفة أي أنَّ $C(u) \neq C(v)$ مع الملاحظة أنَّ الألوان المستخدمة في تلوين البيان يمكن أن تكون عناصراً لأي مجموعة فالألوان الحقيقية مثل (الأحمر والأزرق والأخضر ... الخ) يتم اختيارها عندما نحتاج إلى عدد قليل من الألوان وفي خلاف ذلك سنستخدم الأعداد الصحيحة الموجبة $1,2,3,\dots,k$ للتلوين، وعندما نتحدث عن تلوين عقد أو أضلاع بيان وعند استخدام الأعداد الطبيعية في التلوين فإننا نكافئ بين اللون والعدد ، أي لايوجد فرق في القول أنه تُلون العقدة أو الضلع باللون1 أو بالعدد 1.

3.2.2. العدد اللوني للعقد:

إذا كان لدينا تلوين مناسب للعقد فإن العدد اللوني هو أقل عدد من الألوان اللازمة لتلوين عقد البيان G ويرمز له بالرمز $\chi(G)$.

3.2.3.التلوين الأساسي للأضلاع (Proper Edge Colouring):

نسمي تلوين الأضلاع بالتلوين المناسب للأضلاع للبيان G عند تخصيص ألوان مختلفة لكل ضلعين متجاورين.

3.2.4. التلوين من الدرجة k (للأضلاع):

إذا كان كل لون مستخدم في تلوين أضلاع البيان هو واحد من مجموعة الألوان التي عددها k لون معطى عندئذٍ يسمى هذا التلوين بتلوين الأضلاع من الدرجة k وسنعتبر أنَّ الألوان $1,2,3,\dots,k$ مُستخدمة في التلوين.

5.2.3.<u>العدد اللوني الضلعي</u>:

ويُعرف بإنه أصغر عدد صحيح موجب k الذي من أجله يملك البيان G تلويناً للأضلاع من الدرجة k ويرمز له بالرمز $\chi'(G)$ حيث k عدد صحيح موجب.

6.2.3.<u>التلوين الضلعي المستمر (Continuous Edge Colouring)</u>: [3]

يكون التلوين المناسب للأضلاع $ecol: E(G) \to S \subseteq \mathbb{N}$ للبيان G مستمراً إذا كانت الألوان المخصصة للأضلاع المؤثرة بكل عقدة ألواناً متتالية أي إذا كان الضلعان e_j و e_i المؤثران بالعقدة v ملونين باللونين i,j حيث (i< j) توجد مجموعة الأضلاع المؤثرة بالعقدة v تكون ملونة بالألوان

$$i+1, i+2, \dots, j-1$$

7.2.3. <u>العدد اللوني الضلعي المستمر</u>: ويُعرف بإنه أصغر عدد صحيح موجب الذي من أجله يملك البيان G تلويناً ضلعياً مستمراً من الدرجة k ويرمز له بالرمز $\chi'_c(G)$.

3.3. بعض المبرهنات الأساسية المتعلقة بتلوين البيان P_n: [3]

1.3.3. العدد اللوني لتلوين عقد المسار P_n يعطى بالعلاقة:

$$\chi(P_n) = \begin{cases} 1 & ; \quad \text{if } n = 1 \\ 2 & ; \quad \text{if } n > 2 \end{cases}$$

2.3.3. العدد اللوني لتلوين أضلاع المسار P_n يعطى بالعلاقة:

$$\chi'(P_n) = \begin{cases} 1 & ; \quad \text{if } n = 2 \\ 2 & ; \quad \text{if } n > 2 \end{cases}$$

3.3.3. العدد اللوني الضلعي المستمر للمسار P_n يعطى بالعلاقة:

$$\chi'_C(P_n) = \begin{cases} 1 & ; \quad \text{if } n = 2 \\ 2 & ; \quad \text{if } n > 2 \end{cases}$$

4.3.3. العدد اللوني الضلعي المستمر للبيانات ثنائية التجزئة $K_{1,n}$ يعطى بالعلاقة:

$$\chi'_C(K_{1,n}) = n \qquad ; n \geq 1$$

5.3.3. خواص في التلوين الضلعي المستمر:

- ✓ قد يختلف العدد اللوني لتلوين الأضلاع عن العدد اللوني الضلعي المستمر.
- ✓ ليست كل البيانات قابلة للتلوين الضلعي المستمر.

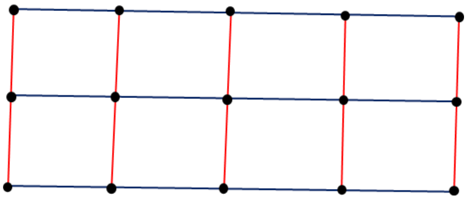
4) النتائج والمناقشة:

سنناقش نتائج البحث وفق أربع مراحل كما يلي:

1.4. المرحلة الأولى (مرحلة إنتاج صف البيانات $P_n \times P_m$):

يتم الحصول على صف البيانات $P_n \times P_m$ عن طريق الجداء الديكارتي لكل من المسارين P_n و P_m ونلاحظ أنَّ البيانات وهي عبارة عن نسخ أفقية من المسار P_n (m نسخة) يربط بين هذه المسارات نسخ عمودية من المسار P_m (n نسخة) من أجل أية قيمة ل n

نقترح ترميز البيان $P_n \times P_m$ بالرمز $PP_{n,m}$ لاختصار الكتابة وننوه أننا نستخدم بهذا البحث الترميزين معاً. ولنعرض الشكل التالي للبيان $P_5 \times P_3$ وهو عبارة عن ثلاثة نسخ من المسار P_5 يربط بينها خمسة نسخ من المسار P_3 والشكل التالي يوضح ذلك:



الشكل (3) يمثل البيان $P_5 \times P_3$

2.4. المرحلة الثانية (مرحلة تطبيق التلوين الضلعي المستمر على صف البيانات $PP_{n,m}$):

ولنناقش دراسة التلوين الضلعي المستمر لصف البيانات $PP_{n,m}$ نفُّصل الدراسة حسب قيم n و m وفق ثلاثة حالات كل حالة تتضمن وضع خوارزمية التلوين الضلعي المستمر، وتحديد الصيغة العامة للعدد اللوني الضلعي المستمر بشكل دقيق، وعرض بعض الأمثلة التوضيحية بالإضافة إلى البرهان على قابلية تحقيق البيانات $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر.

1.2.4. <u>الحالة الأولى</u>: في حال كانت n و m زوجيان في البيان $PP_{n,m}$:

1.1.2.4. خوارزمية التلوين الضلعي المستمر:

بما أنَّ البيان $PP_{n,m}$ هو عبارة عن نسخ أفقية من المسار P_n يربط بينها نسخ عمودية من المسار P_m فإننا سنقوم بالتلوين وفق مرحلتين:

- نُلون أضلاع جميع المسارات الأفقية P_n بالتناوب بالألوان 1,2 بحيث تكون الأضلاع المُتَقَابِلَة بجميع الْمَسَارات الأفقية تَحمِلُ نَفْسَ اللون.
- نُلون أضلاع المسارات العمودية P_m الرابطة بين المسارات الأفقية P_n كما يلي:

i.نُلون أضلاع أول وآخر مسارين عموديين بالألوان 2,3 بالتناوب.

ii.نُلون أضلاع باقي المسارات العمودية بالألوان 3,4 بالتناوب بحيث تكون الأضلاع المُتَقَابِلَة بجميع الْمَسَارات الأفقية تَحمِلُ نَفْسَ اللون.

2.1.2.4. الصيغة العامة التي تحدد العدد اللوني الضلعي المستمر للبيان $PP_{n,m}$ من أجل مرتبته nm زوجية حيث (n و m زوجيان) تُعطى كما يلي:

$$\chi'_C(PP_{n,m}) = \begin{cases} 2 \;; & n = m = 2 \\ 3 \;; & m = 2 \text{ و } n \geq 4 \\ & \text{or } n = 2 \text{ و } m \geq 4 \\ 4 \;; & m \geq 4 \text{ و } n \geq 4 \end{cases}$$

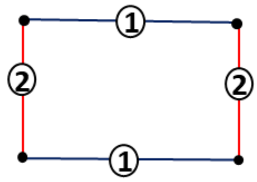
نكون بحاجة إلى لونين لأن البيان الناتج يحوي البيان $K_{1,2}$ ولا يحوي بيان من مرتبة أعلى، ونحتاج إلى ثلاثة ألوان لأن البيان الناتج يحوي البيان $K_{1,3}$ ولا يحوي بيان من مرتبة أعلى، وفي حالة أربعة ألوان لأن البيان الناتج يحوي البيان $K_{1,4}$ ولا يحوي بيان من مرتبة أعلى.

3.1.2.4. وسنقوم بإرفاق بعض الأمثلة التوضيحية التي تُمكننا من فهم التلوين الضلعي المستمر بالإضافة إلى عرض النتائج التي يمكن من خلالها معرفة فيما إذا كان البيان المدروس يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً أم لا حسب قيم n و m.

<u>لندرس البيان P_n مع المسار P_m</u>:

- من أجل n=m=2 البيان الناتج هو البيان $PP_{2,2}$ ويعطى العدد اللوني الضلعي المستمر بهذه الحالة بالعلاقة:

$$\chi'_C(PP_{2,2}) = 2$$

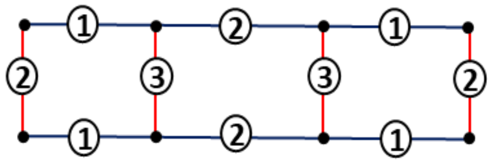


الشكل (4) يمثل البيان $PP_{2,2}$

- من أجل (n≥4 & m=2 or m≥4 & n= 2):

مثلاً البيان $PP_{4,2}$ ويعطى العدد اللوني الضلعي المستمر بالعلاقة:

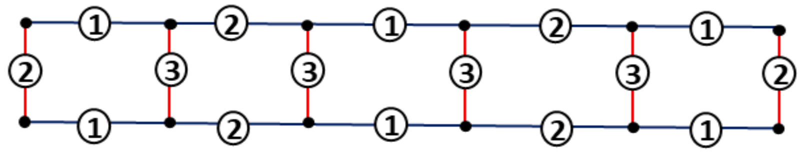
$$\chi'_C(PP_{4,2}) = 3$$



الشكل (5) يمثل البيان $PP_{4,2}$

- مثال آخر البيان $PP_{6,2}$

$$\chi'_C(PP_{6,2}) = 3$$



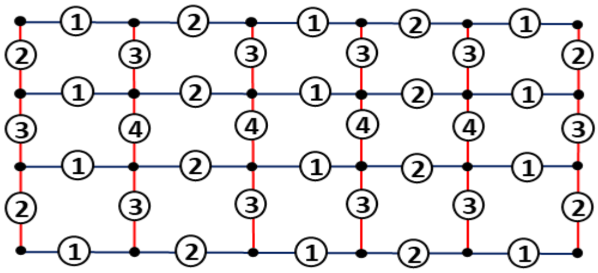
الشكل (6) يمثل البيان $PP_{6,2}$

ولو درسنا التلوين الضلعي المستمر لأي بيان ناتج عن الجداء الديكارتي لأي مسار P_m من أجل m≥4 (بحيث يكون m زوجي) مع المسار P_2 لوجدنا أنه يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً بعدد لوني مقداره 3.

- من أجل (n≥4 & m≥4):

مثلاً البيان $PP_{6,4}$ ويعطى العدد اللوني الضلعي المستمر بهذه الحالة بالعلاقة:

$$\chi'_C(PP_{6,4}) = 3$$



الشكل (7) يمثل البيان $PP_{6,4}$

وبدراسة التلوين الضلعي المستمر لأي بيان ناتج عن الجداء الديكارتي لأي مسار P_n حيث $n \geq 4$ مع المسار P_m من أجل (m≥4 بحيث يكون m زوجي) لوجدنا أنه يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً بعدد لوني مقداره 4 ويكون ذلك محقق أيضاً من أجل البيانات P_6 و P_8 و P_{10} و...

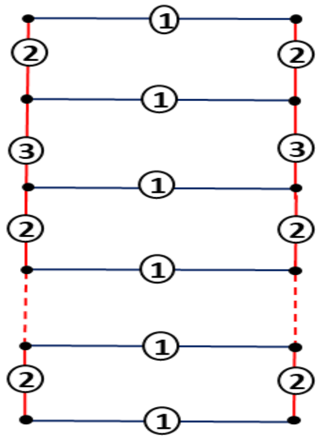
4.1.2.4.البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على قابلية تحقيق البيانات $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر في حال n و m زوجيان.

1) نثبت صحة القضية من أجل $(k = 1)$:

ليكن لدينا البيان $PP_{2k,m}$ حيث m زوجي من أجل $k = 1$ فإن البيان الناتج هو البيان $PP_{2,m}$ ولنُثبت أنَّه يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً. بما أنَّ المسار P_m زوجي العقد فإنه عند تلوين أضلاعه فإنه يبدأ بلون وينتهي بنفسه وهو اللون 2 حسب الخوارزمية ولأن $k = 1$

فإن البيان P_{2k} هو البيان P_2 ويُلون باللون 1 حسب الخوارزمية ونلاحظ أنَّ آخر لون في المسار P_m يتوافق مع لون الضلع الواقع في المسار P_2 وأيضاً أول ضلع في المسار P_m يتوافق مع لون الضلع في المسار P_2 ويحقق خاصة الاستمرار والشكل (8) يوضح ذلك:

أما بالنسبة لألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد ذات الدرجة الثالثة فإنها تشترك بثلاثة أضلاع ضلعين من المسار العمودي P_m ملونين بالألوان 2 و3 وضلع من المسار الأفقي الرابط بين المسارات العمودية ويأخذ اللون 1 مما سبق نلاحظ أنَّ جميع ألوان الأضلاع تحقق خاصة الاستمرار وبالتالي فإن البيان $PP_{2k,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل $k =1$ وذلك بشرط m عدد زوجي وبهذه الحالة نكون قد أثبتنا صحة القضية عند $k = 1$.



الشكل (8) يمثل البيان $PP_{2,m}$

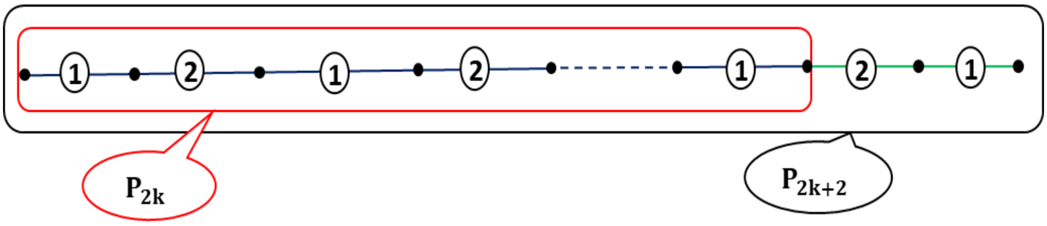
2) نفرض أنَّ القضية صحيحة من أجل $(n = 2k)$:

أي لنفرض أن البيان $PP_{2k,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل (m زوجي) حيث $k = 1,2,3,\dots$

3) إثبات صحة القضية من أجل $(k+1)$ أي $(n = 2(k+1) =2k+2)$:

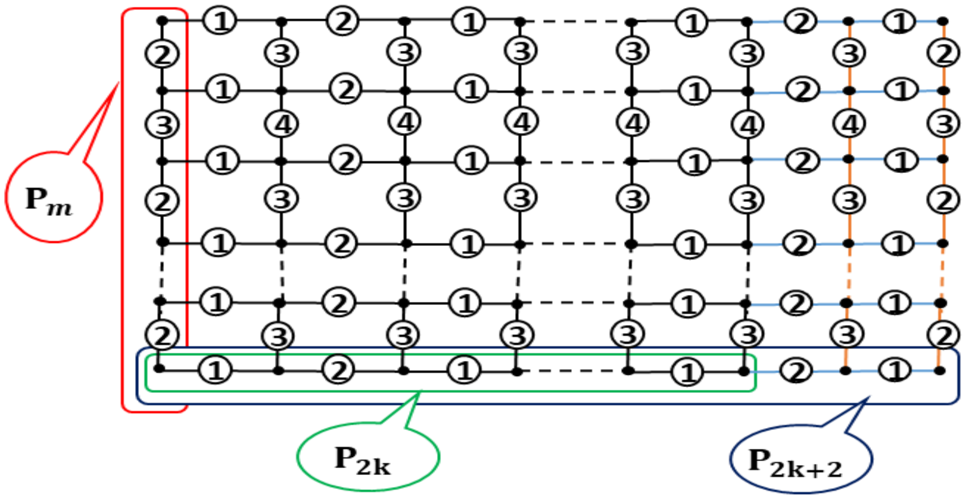
أي لنُثبت أنَّ البيان $PP_{n,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل $n = 2k+2$ و m زوجيان.

لدينا فرضاً البيان $PP_{2k,m}$ محقق للتلوين الضلعي المستمر أي من أجل أي مسار P_{2k} مرتبته زوجية فإن أضلاعه تبدأ بلون وتنتهي باللون ذاته، وبالتالي يتوافق مع ألوان أضلاع المسارات العمودية P_m وهذا ما هو محقق فرضاً، ولدراسة التلوين الضلعي المستمر للبيان $PP_{2k+2,m}$ نناقش المسار P_{2k+2} والذي قمنا بالحصول عليه من المسار P_{2k} وذلك بإضافة عقدتين يرافقها إضافة ضلعين، وحسب الخوارزمية الموافقة لحالة n و m زوجيان فإنه يُلون الضلعان بالألوان 2,1 ويترتب على إضافة الضلعان إضافة مساران عموديان حسب تعريف الجداء الديكارتي للمسارين P_n و P_m.



الشكل (9) يمثل المسار P_{2k+2}

اللون 2 وهو لون الضلع قبل الأخير بالمسارات الأفقية P_{2k+2} ويتوافق مع لون آخر ضلع بالمسارات الأفقية P_{2k} وهو اللون 1 ومع اللون 1 آخر ضلع بالمسارات الأفقية P_{2k+2} وأيضاً مع ألوان أضلاع المسارات العمودية وهي 3,4 ليحقق خاصة الاستمرار. أما اللون 1 وهو لون آخر ضلع بجميع المسارات الأفقية P_{2k+2} ويتوافق مع ألوان أضلاع المسارين العمودين الأخير والذي قبله، ويتوافق أيضاً مع لون الضلع قبل الأخير وهو 2 بالمسارات P_{2k+2} ليحقق خاصة الاستمرار، وبالتالي فإن جميع ألوان أضلاع البيان $PP_{2k+2,m}$ تقبل تلويناً ضلعياً مستمراً وللتوضيح أكثر نأخذ الشكل التالي:



الشكل (10) يمثل البيان $PP_{2k+2,m}$

من الشكل (10) نلاحظ وجود ثلاثة أنواع من العقد حسب درجتها وهي عقد من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة ونناقش بشكل مفصل ألوان الأضلاع المرتبطة بكل عقدة على حدا.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية: إنَّ أول وآخر ضلع بالمسار الأفقي الأول والأخير يُلونان باللون 1 ويتوافق مع لون أول وآخر ضلع بالمسارين العموديين الأول والأخير وهو اللون 2 (حسب الخوارزمية) وذلك لأن جميع المسارات الأفقية P_{2k+2} والمسارات العمودية P_m مرتبتها زوجية لذلك تبدأ بلون وتنتهي بنفسه، أي أنَّ الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية تُلون بالألوان 1 و 2 وبالتالي تتحقق خاصة الاستمرار.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة: كل عقدة ترتبط بثلاثة أضلاع وتُلون بالألوان 1و 2 لأضلاع المسارين الأفقيين الأول والأخير واللون 3 بأول وآخر ضلع من المسارات العمودية وأيضاً تُلون أضلاع أول وآخر مسارين عموديين بالألوان 2 و 3 واللون 1 بأول وآخر ضلع من المسارات الأفقية، وبالتالي فإن جميع ألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة تُلون بالألوان 1,2,3 وبالتالي تتحقق خاصة الاستمرار.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الرابعة: كل عقدة ترتبط بأربعة أضلاع تُلون بالألوان 1 و 2 لأضلاع المسارات الأفقية والألوان 3 و 4 لأضلاع المسارات العمودية، وبالتالي فإن الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الرابعة تُلون بالألوان 1,2,3,4.

مما سبق نستنتج أنَّ جميع ألوان الأضـلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة في البيان $PP_{2k+2,m}$ تحقق خاصـة الاستمرار (التدرج اللوني) وبذلك نكون قد أثبتنا صحة القضية من أجل $n=2k+2$ وبالتالي فالبيان $PP_{n,m}$ يحقق التلوين الضلعي المستمر من أجل n و m زوجيان.

5.1.2.4. <u>نتيجة</u>:

إذا كانت مرتبة البيان $PP_{n,m}$ زوجية أي (nm زوجياً) فإن البيان $PP_{n,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً.

2.2.4.<u>الحالة الثانية</u>: في حال كان n زوجي و m فردي أو n فردي و m زوجي في البيان $PP_{n,m}$.

1.2.2.4. خوارزمية التلوين الضلعي المستمر:

سيتم التلوين لأضلاع البيان $PP_{n,m}$ وفق مرحلتين:

- تلوين المسارات P_n والتي مرتبتها زوجية:

تُلون أضلاع جميع المسارات بالتناوب بالألوان 1,2 ماعدا آخر مسار فإنه تُلون أضلاعه بالتناوب بالألوان 2,3.

- تلوين المسارات P_m التي مرتبتها فردية والرابطة بين المسارات P_n كما يلي:

i.تُلون أضلاع أول وآخر مساريين عموديين بالتناوب بالألوان 2,3.

ii.تُلون أضلاع باقي المسارات العمودية بالتناوب بالألوان 3,4.

<u>ملاحظة</u>: إنَّ مناقشة قابلية تحقيق البيان $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر في حال n زوجي و m فردي هي نفس المناقشة لو أخذنا n فردي و m زوجي.

2.2.2.4. الصيغة العامة التي تحدد العدد اللوني الضلعي المستمر للبيان $PP_{n,m}$ من أجل مرتبته nm زوجية أياً يكن (n زوجي و m فردي أو n فردي و m زوجي) تُعطى كما يلي:

$$\chi'_C(PP_{n,m}) = \begin{cases} 1 \quad ; \ n=2 \text{ و } m=1 \\ 3 \quad ; \ (n=2 \text{ و } m\geq 3) \\ \quad\ \ \text{or } (m=2 \text{ و } n\geq 4) \\ 4 \quad ; \ n\geq 2 \text{ و } m\geq 3 \end{cases}$$

نلاحظ أنه من أجل $m=1$ و $n=2$ فإن البيان الناتج هو البيان $PP_{2,1}$ أي نفســه البيان P_2 ويُلون بلون واحد، ونحتاج إلى ثلاثة ألوان لأن البيان الناتج يحوي البيان $K_{1,3}$ ولا يحوي بيان من مرتبة أعلى، وفي حالة أربعة ألوان لأن البيان الناتج يحوي البيان $K_{1,4}$ ولا يحوي بيان من مرتبة أعلى.

3.2.2.4. وسنقوم بإرفاق بعض الأمثلة التوضيحية التي تُمكننا من فهم التلوين الضلعي المستمر للبيانات بالإضافة إلى عرض النتائج التي يمكن من خلالها معرفة فيما إذا كان البيان المدروس يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً أم لا حسب قيم n و m.

- من أجل n=2 & m=1:

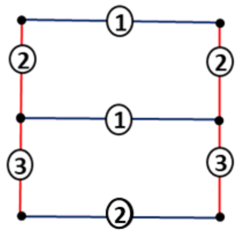
البيان الناتج هو البيان $PP_{2,1}=P_2$:

$$\chi'_C(PP_{2,1}) = 1$$

الشكل (11) يمثل البيان $PP_{2,1}$

• من أجل (n=2 & m=3) البيان الناتج هو البيان $PP_{2,3}$:

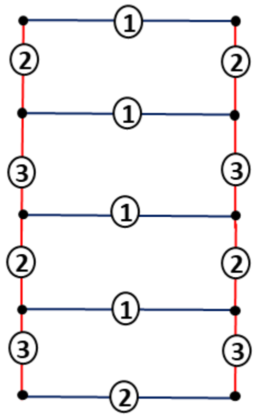
$\chi'_c(PP_{2,3}) = 3$



الشكل (12) يمثل البيان $PP_{2,3}$

• من أجل (n=2 & m=5) البيان الناتج هو البيان $PP_{2,5}$:

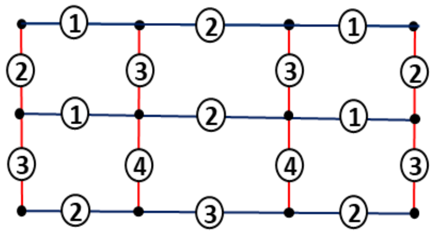
$\chi'_c(PP_{2,5}) = 3$



الشكل (13) يمثل البيان $PP_{2,5}$

• من أجل (n=4 & m=3) البيان الناتج هو البيان $PP_{4,3}$:

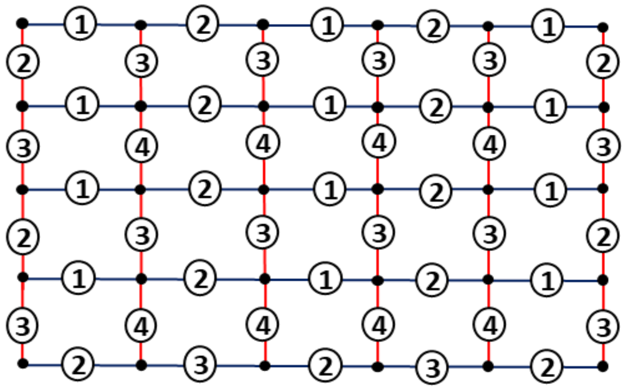
$\chi'_c(PP_{4,3}) = 4$



الشكل (14) يمثل البيان $PP_{4,3}$

• من أجل (n=6 & m=5) البيان الناتج هو البيان $PP_{6,5}$:

$\chi'_c(PP_{6,5}) = 4$



الشكل (15) يمثل البيان $PP_{6,5}$

وبدراسة التلوين الضلعي المستمر لأي بيان $PP_{n,m}$ حيث n زوجي و m فردي أياً يكن $m\geq4$ و $n\geq3$ لوجدنا أنه يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً بعدد لوني مقداره 4.

4.2.2.4.البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على قابلية تحقيق البيانات $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر في حال n زوجي و m فردي.

1) نثبت صحة القضية من أجل $(k = 1)$:

ليكن لدينا البيان $PP_{n,k}$ ولنُثبت صحة القضية من أجل $k = 1$ إنَّ البيان الناتج هو البيان $PP_{n,1}$ حيث n زوجي أي لنُثبت أنَّ البيان $PP_{n,1}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً.

إنَّ البيان $PP_{n,1}$ حسب تعريف الجداء الديكارتي هو المسار P_n وحسب الدراسات المرجعية فإنه يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً بعدد لوني يُعطى بالعلاقة:

$$\chi'_C(P_n) = \begin{cases} 1 & ; \quad \text{if } n = 2 \\ 2 & ; \quad \text{if } n > 2 \end{cases}$$

عندئذٍ فالبيان $PP_{n,1}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً، والقضية صحيحة من أجل $k = 1$.

2) نفرض أنَّ القضية صحيحة من أجل $(m = 2\,k)$:

أي لنفرض أن البيان $PP_{n,2k}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل (n زوجي) حيث $k = 1,2,3,\dots$ مع الملاحظة أنَّ هذا الفرض قد أثبتناه في الحالة الأولى (أنَّ البيان $P_{n,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل n و m زوجيان).

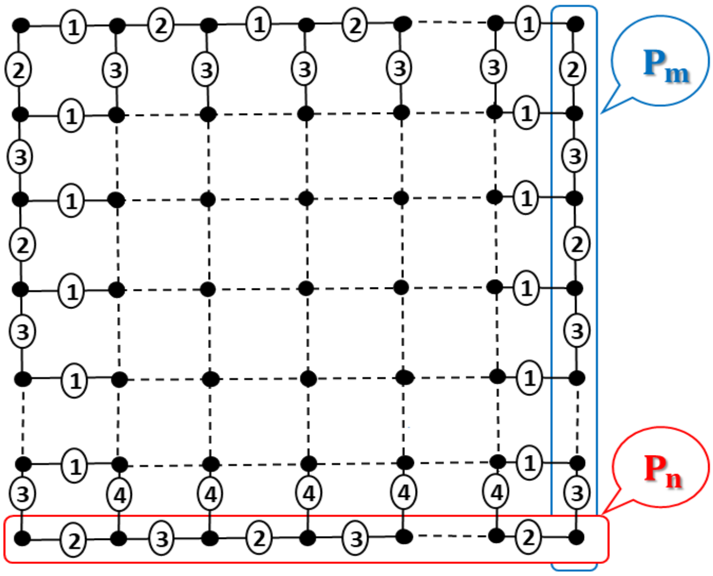
3) إثبات صحة القضية من أجل $(k+1)$ أي $(m = 2(k+1) = 2k+2)$:

أي لنُثبت أنَّ البيان $PP_{n,2k+2}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل n زوجي حيث $k = 1,2,3,\dots$

لدينا حسب الفرض البيان $PP_{n,2k}$ يحقق التلوين الضلعي المستمر، ولمناقشة قابلية تحقيق البيان $PP_{n,2k+2}$ للتلوين الضلعي المستمر نناقش من أجل $m = 2k+2$ وللحصول على المسار P_{2k+2} سيتم إضافة عقدتين للمسار P_{2K} يُرافقها إضافة ضلعين عندئذٍ المسار الناتج P_{2k+2} مرتبته زوجية من أجل أية قيمة ل k عندئذٍ سيبدأ بلون وينتهي باللون نفسه، وهذه هي الحالة الأولى وقد ناقشناها سابقاً، وبالتالي فالقضية صحيحة من أجل k+1 وللتوضيح أكثر نناقش من ناحية ثانية:

انطلاقاً من المسارات الأفقية P_n والتي مرتبتها زوجية فإن أضلاعُها تبدأ بلون وتنتهي باللون نفسه، أما بالنسبة للمسارات العمودية P_m فإن مرتبتها فردية فهي تبدأ بلون وتنتهي بلون آخر، والبيان الناتج $PP_{n,m}$ يحوي عقد من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة ولنناقش خاصية الاستمرار لألوان الأضلاع كما يلي:

سنعرض بدايةً الشكل التالي لمناقشة التلوين الضلعي المستمر للأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية والثالثة في البيان $PP_{n,m}$.



الشكل (16) يمثل البيان $PP_{n,m}$ من أجل n زوجي و m فردي

من الشكل نلاحظ وجود نوعين من العقد حسب درجتها وهي عقد من الدرجة الثانية والثالثة ولنناقش بالتفصيل ألوان الأضلاع المرتبطة بكل عقدة على حدا.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية: وتأخذ الألوان $\{1,2\}$ أو $\{2,3\}$

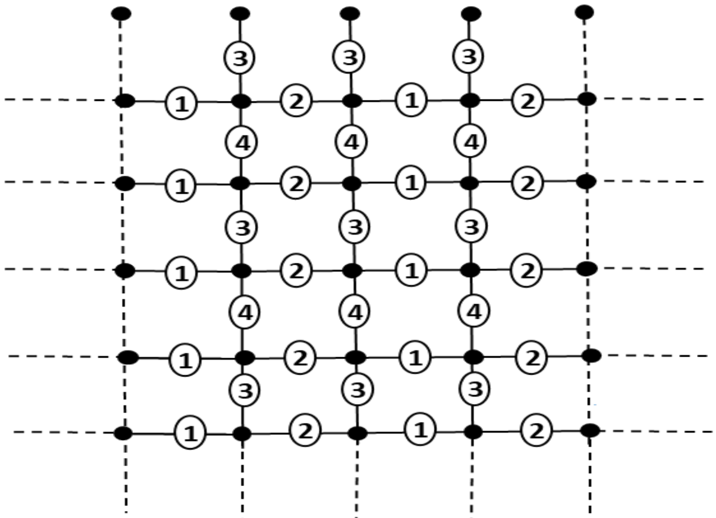
بالنسبة للألوان $\{1,2\}$ اللون 2 وهو لون أول ضلع بالمسار العمودي P_m الأول والأخير، ويتوافق مع اللون 1 لون أول وآخر ضلع بالمسار الأفقي الأول P_n ليحقق خاصة الاستمرار، أما بالنسبة للألوان$\{2,3\}$اللون 3 وهو لون آخر ضلع بالمسار العمودي P_m الأول والأخير ويتوافق مع اللون 2 لون أول وآخر ضلع بالمسار الأفقي الأخير P_n ليحقق خاصة الاستمرار، أي أنَّ الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية تحقق خاصة الاستمرار.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة: وتأخذ الألوان $\{1,2,3\}$ أو$\{2,3,4\}$

بالنسبة للألوان $\{1,2,3\}$ وهي الألوان 3 و2 لأضلاع المسارين العموديين الأول والأخير لتتوافق مع اللون 1 بأول وآخر ضلع من المسارات الأفقية المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة (لأن المسارات الأفقية P_n مرتبتها زوجية فهي تبدأ بلون وتنتهي بنفسه وهو1)، وبالتالي تحقق خاصة الاستمرار أو ألوان أضلاع المسار الأفقي الأول 2 و1 لتتوافق مع اللون 3 لون أول ضلع بجميع المسارات العمودية ماعدا الأول والأخير ناقشناه سابقاً.

أما بالنسبة للألوان $\{2,3,4\}$ وهي الألوان 3 و2 لأضلاع المسار الأفقي الأخير لتتوافق مع اللون 4 لون آخر ضلع من المسارات العمودية المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة عندئذٍ تُحقق خاصة الاستمرار، وبالتالي فإن جميع ألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة تتحقق خاصة الاستمرار.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الرابعة: وتأخذ الألوان $\{1,2,3,4\}$إنَّ كل عقدة ترتبط بأربعة أضلاع تُلون بالألوان 1,2,3,4 وحسب الخوارزمية هي عبارة عن ألوان أضلاع المسارات الأفقية P_n وهي 1,2 مع ألوان أضلاع المسارات العمودية P_m وهي الألوان 3,4 لتحقق خاصة الاستمرار والشكل (16) يوضح ذلك:



الشكل (17) يوضح ألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الرابعة في البيان $PP_{n,m}$ من أجل n زوجي و m فردي

مما سبق نستنتج أنَّ جميع ألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة في البيان $PP_{n,m}$ تحقق خاصة الاستمرار (التدرج اللوني) عندئذٍ فالبيان $PP_{n,m}$ يحقق التلوين الضلعي المستمر في حال n زوجي و m فردي.

5.2.2.4 __نتيجة__: إذا كانت مرتبة البيان $PP_{n,m}$ زوجية أي (nm زوجياً) فإن البيان $PP_{n,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً.

3.2.4. __الحالة الثالثة__: في حال كانت n و m فرديان في البيان $PP_{n,m}$:

1.3.2.4. خوارزمية التلوين الضلعي المستمر:

سنقوم بالتلوين وفق مرحلتين:

- نُلون أضلاع جميع المسارات الأفقية P_n بالتناوب بالألوان 2,3.
- نُلون أضلاع المسارات العمودية P_m الرابطة بين المسارات الأفقية P_n كما يلي:

i.نُلون أضلاع أول مسار عمودي بالتناوب بالألوان 1,3.

ii.نُلون أضلاع آخر مسار عمودي بالتناوب بالألوان 2,4.

- نُلَوِّنُ أَضْـلَاعَ بَاقي الْمَسَـارات العمودية بِالتَّنَاوُبِ بِالْأَلوَان 1,4 بحيث تكون جميع أضــلاع الْمَسَـارات المُتَقَابِلَة تَحمِلُ نَفْسَ اللون.

2.3.2.4. الصيغة العامة التي تحدد العدد اللوني الضلعي المستمر للبيان $PP_{n,m}$ من أجل مرتبته nm فردية حيث (n و m فرديان) تُعطى كما يلي:

$$\chi'_{c}(PP_{n,m}) = \begin{cases} 2 & ; \quad n = 1 \text{ و } m > 3 \\ & \quad \text{or } (m = 1 \text{ و } n > 3) \\ 4 & ; \quad n \geq 3 \text{ و } m \geq 3 \end{cases}$$

مع الملاحظة أنه عندما نأخذ n=m=1 فإن البيان الناتج هو عبارة عن عقدة منعزلة ليس لها أضلاع إذن لا يوجد تلوين ضلعي مستمر بهذه الحالة، ونكون بحاجة إلى لونين لأن البيان الناتج يحوي البيان $K_{1,2}$ ولا يحوي بيان من مرتبة أعلى، ونحتاج إلى أربعة ألوان لأن البيان الناتج يحوي البيان $K_{1,4}$ ولا يحوي بيان من مرتبة أعلى.

3.3.2.4. وسنقوم بإرفاق بعض الأمثلة التوضيحية التي تُمكننا من فهم التلوين الضلعي المستمر بالإضافة إلى عرض النتائج التي يمكن من خلالها معرفة فيما إذا كان البيان المدروس يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً أم لا حسب قيم n و m.

- لنناقش في حالة $(n=1 \ \& \ m>1)$:
- من أجل $(n=1 \ \& \ m=3)$ البيان الناتج هو البيان $PP_{1,3}$:

$$\chi'_c(PP_{1,3}) = 2$$

الشكل (18) يمثل البيان $PP_{1,3}$

- من أجل $(n=1 \ \& \ m=5)$ البيان الناتج هو البيان $PP_{1,5}$:

$$\chi'_c(PP_{1,5}) = 2$$

الشكل (19) يمثل البيان $PP_{1,5}$

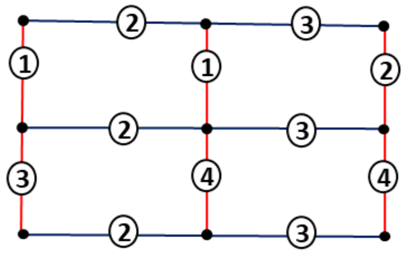
- من أجل $(n=1 \ \& \ m=7)$ البيان الناتج هو البيان $PP_{1,7}$:

$$\chi'_c(PP_{1,7}) = 2$$

الشكل (20) يمثل البيان $PP_{1,7}$

- <u>لنناقش في حالة ($m\geq3$ & $n\geq3$ حيث n و m فرديان)</u>:
- من أجل ($m=3$ & $n=3$) البيان الناتج هو البيان $PP_{3,3}$ والعدد اللوني الضلعي المستمر يُعطى بالعلاقة:

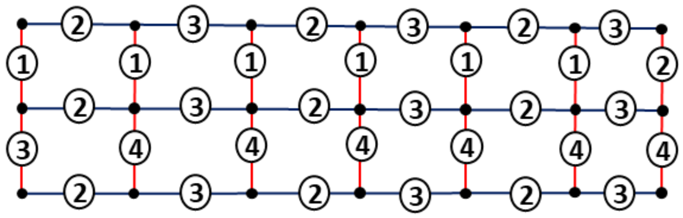
$$\chi'_C(PP_{3,3}) = 4$$



الشكل (21) يمثل البيان $PP_{3,3}$

- من أجل ($m=7$ & $n=3$) البيان الناتج هو البيان $PP_{7,3}$:

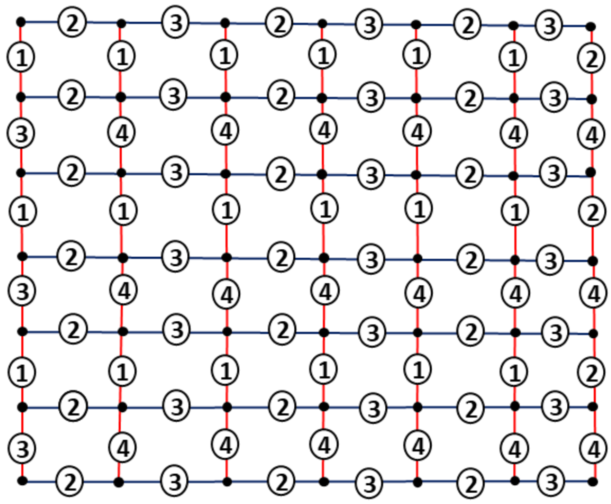
$$\chi'_C(PP_{7,3}) = 4$$



الشكل (22) يمثل البيان $PP_{7,3}$

- من أجل ($m=7$ & $n=7$) البيان الناتج هو البيان $PP_{7,7}$:

$$\chi'_C(PP_{7,7}) = 4$$



الشكل (23) يمثل البيان $PP_{7,7}$

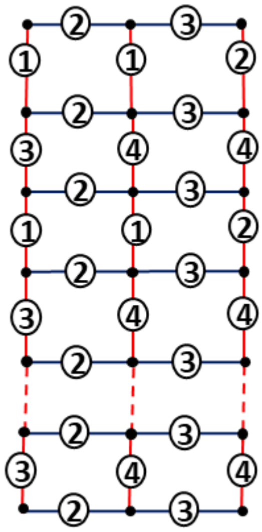
4.3.2.4. البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي على قابلية تحقيق البيانات $PP_{n,m}$ للتلوين الضلعي المستمر في حال n و m فرديان.

1) نثبت صحة القضية من أجل ($k = 1$):

لنأخذ $n=2k+1$ ولنُثبت أنَّ البيان $PP_{2k+1,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل $k=1$ حيث m فردي.

من أجل $k=1$ البيان الناتج هو البيان $PP_{3,m}$ حيث m فردي، تجريباً وحسب الخوارزمية التي قدمناها سابقاً فإنه تُلون أضلاع جميع المسارات الأفقية بالألوان 2,3 بالتناوب، ولأنه لدينا المسار P_3 هو الممثل للمسارات الأفقية إذن تُلون أضلاعه بالألوان 2,3 وحسب

الخوارزمية تُلون أضــلاع المســار العمودي الأول بالتناوب بالألوان 1,3 ولأن مرتبته فردية فإنه يبدأ باللون 1 وينتهي باللون 3 إذن يتوافق لون أول ضــلع بجميع المســارات الأفقية وهو اللون 2 مع ألوان أضــلاع المســار العمودي الأول 1و3 وهي تحقق خاصــة الاستمرار، وتتوافق ألوان أضلاع المسار العمودي الثاني 1 و4 مع ألوان أضلاع جميع المسارات الأفقية 2 و3 عندئذٍ تحقق خاصة الاستمرار والشكل المجاور يُوضح ذلك.



الشكل (24) يمثل البيان $PP_{3,m}$

أما بالنسبة للمسار العمودي الأخير تُلون أضـلاعه بالتناوب بالألوان 2,4 وتتوافق هذه الألوان مع لون آخر ضـلع بجميع المسارات الأفقية وهو اللون 3 ليحقق خاصة الاستمرار، أي أنَّ ألوان أضلاع البيان $PP_{3,m}$ تكون كما يلي:

$\{1,2\}$و$\{2,3\}$و$\{3,4\}$و$\{1,2,3\}$و$\{2,3,4\}$و$\{1,2,3,4\}$ مما سبق نلاحظ أنَّ البيان $PP_{3,m}$ يقبل تلويناً ضـلعياً مستمراً، وبالتالي فالبيان $PP_{2k+1,m}$ يحقق التلوين الضلعي المستمر والقضية صحيحة من أجل $k = 1$.

2) نفرض أنَّ القضية صحيحة من أجل $(n = 2k)$:

أي لنفرض أن البيان $PP_{2k,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل (m فردي) حيث $k = 1,2,3, \dots$ هذه الحالة درسناها سابقاً في حال كان لدينا في البيان $PP_{n,m}$ أحد المساران مرتبته زوجية والآخر مرتبته فردية، وأثبتنا أنه محقق للتلوين الضلعي المستمر.

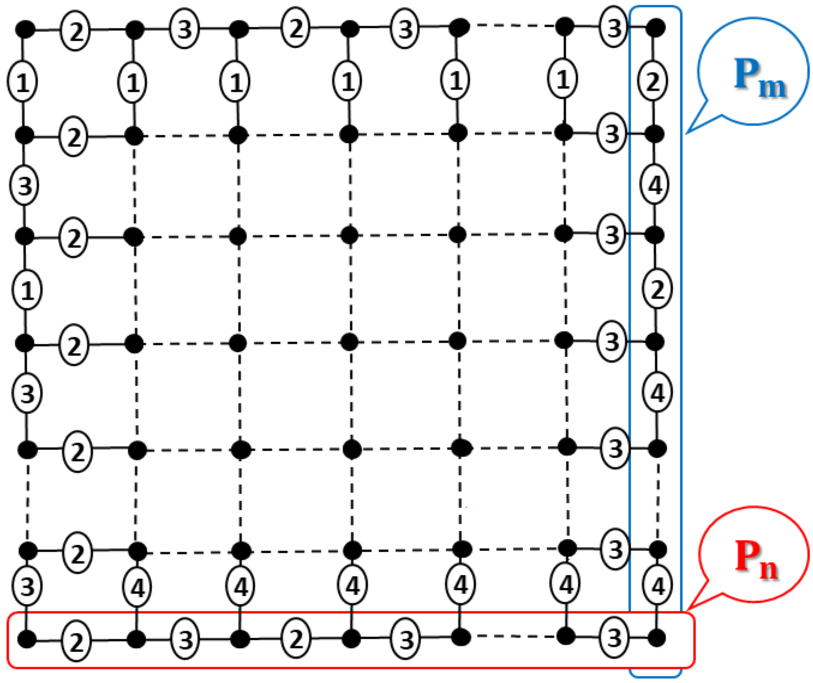
3) إثبات صحة القضية من أجل $(k+1)$ أي $(n = 2(k+1) = 2k+2)$:

أي لنُثبت أنَّ البيان $PP_{2k+2,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً من أجل m فردي و$k = 1,2,3,\dots$.

انطلاقاً من الفرض لدينا البيان $PP_{2k,m}$ يقبل تلويناً ضـلعياً مستمراً حيث m فردي وذلك من أجل $k=1,2,3,\dots$ فمن أجل المسار P_{2k} الذي مرتبته زوجية فإنه يُلون بلون وينتهي بنفســه لذلك يتوافق مع ألوان أضــلاع المســار العمودي الأخير ويحقق خاصــة الاستمرار لألوان الأضـلاع في الحالة المدروسة في هذه الحالة سندرس قابلية تحقيق البيان $PP_{2k+2,m}$ للتلوين الضـلعي المستمر ولأن المســار P_{2k+2} مرتبته زوجية من أجل أية قيمة لـ k والمســار P_m مرتبته فردية وهذه الحالة ناقشــناها ســابقاً، عندئذٍ فالبيان $PP_{2k+2,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً، عندئذٍ فالقضية صحيحة من أجل $n = 2k+1$ وللتوضيح أكثر نناقش من ناحية ثانية:

انطلاقاً من المســـارات الأفقية P_n والمســارات العمودية P_m والتي مرتبتها فردية فهي تبدأ بلون وتنتهي بلون آخر، والبيان الناتج $PP_{n,m}$ يحوي عقد من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة ولنناقش خاصية الاستمرار لألوان الأضلاع كما يلي:

سـنعرض بدايةً الشـكل التالي لمناقشــة التلوين الضــلعي المســتمر للأضــلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية والثالثة في البيان $PP_{n,m}$ من أجل n و m فرديان.



الشكل (25) يوضح ألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية والثالثة للبيان $PP_{n,m}$ من أجل n و m فرديان

من الشكل (25) نلاحظ وجود نوعين من العقد حسب درجتها وهي عقد من الدرجة الثانية والثالثة ولنناقش بالتفصيل ألوان الأضلاع المرتبطة بكل عقدة على حدا.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية: وتأخذ الألوان $\{1,2\}$ أو $\{2,3\}$ أو $\{3,4\}$

بالنسبة للألوان $\{1,2\}$ اللون 2 وهو لون أول ضلع بالمسار الأفقي P_n الأول، ويتوافق مع اللون 1 لون أول ضلع بالمسار العمودي الأول P_m ليحقق خاصة الاستمرار، أما بالنسبة للألوان $\{2,3\}$ اللون 3 وهو لون آخر ضلع بالمسار الأفقي P_n الأول ويتوافق مع اللون 2 لون أول ضلع بالمسار العمودي الأخير P_m وأيضاً يتوافق اللون 3 لون آخر ضلع بالمسار العمودي الأول مع اللون 2 لون أول ضلع بالمسار الأفقي الأخير ، وبالنسبة للألوان $\{3,4\}$ اللون 4 وهو لون آخر ضلع بالمسار العمودي الأخير يتوافق مع اللون 3 لون آخر ضلع بالمسار الأفقي الأخير ليحقق خاصة الاستمرار، أي أنَّ الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية تحقق خاصة الاستمرار.

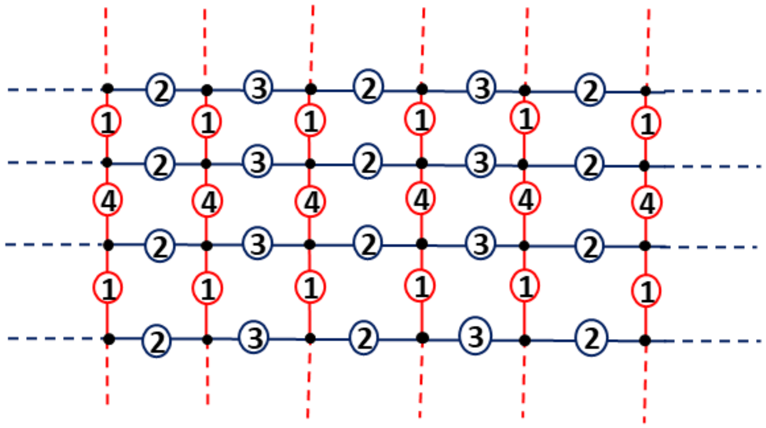
الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة: وتأخذ الألوان $\{1,2,3\}$ أو $\{2,3,4\}$

بالنسبة للألوان $\{1,2,3\}$ وهي الألوان 3 و 2 لأضلاع المسار الأفقي الأول ليتوافق مع اللون 1 بأول ضلع من المسارات العمودية المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة، وأيضاً الألوان 3 و 2 لأضلاع المسار الأفقي الأخير يتوافق مع اللون 4 لون آخر ضلع من المسارات العمودية المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة، وأيضاً هي الألوان 3 و 1 لأضلاع المسار العمودي الأول ليتوافق مع اللون 2 بأول ضلع من المسارات الأفقية المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة وبالتالي تحقق خاصة الاستمرار.

أما بالنسبة للألوان $\{2,3,4\}$ إنَّ الألوان 4 و 2 هي ألوان أضلاع المسار العمودي الأخير وتتوافق مع اللون 3 لون آخر ضلع من المسارات الأفقية المرتبطة بالعقد من الدرجة الثالثة وبالتالي تحقق خاصة الاستمرار.

الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الرابعة: وتأخذ الألوان $\{1,2,3,4\}$

إنَّ كل عقدة ترتبط بأربعة أضلاع تُلون بالألوان 1,2,3,4 وحسب الخوارزمية هي عبارة عن ألوان أضلاع المسارات الأفقية P_n وهي 2 و 3 وتتوافق مع ألوان أضلاع المسارات العمودية P_m وهي 1 و 4 عندئذٍ تحقق خاصة الاستمرار، والشكل (26) يوضح ذلك:



الشكل (26) يوضح ألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الرابعة للبيان $PP_{n,m}$ من أجل n و m فرديان

مما سبق نستنتج أنَّ جميع ألوان الأضلاع المرتبطة بالعقد من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة في البيان $PP_{n,m}$ تحقق خاصة الاستمرار (التدرج اللوني) عندئذٍ فالبيان $PP_{n,m}$ يحقق التلوين الضلعي المستمر من أجل n و m فرديان.

5.3.2.4. <u>نتيجة</u>: إذا كانت مرتبة البيان $PP_{n,m}$ فردية أي (nm فردياً) فإن البيان $PP_{n,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً.

3.4. المرحلة الثالثة (دراسة تلوين الأضلاع لصف البيانات $PP_{n,m}$):

بعد دراسة التلوين الضلعي المستمر لصف البيانات $PP_{n,m}$ وإيجاد العدد اللوني اللازم للتلوين تلويناً ضلعياً مستمراً نجد أنَّ العدد اللوني لتلوين الأضلاع هو نفسه العدد اللوني الضلعي المستمر، وباستخدام نفس الخوارزميات التي قمنا بوضعها في التلوين الضلعي المستمر نحصل على تلوين مناسب للأضلاع، ويعطى العدد اللوني للأضلاع كما يلي:

❖ في حالة n و m زوجيان:

$$\chi'(PP_{n,m}) = \begin{cases} 2 & ; \quad n = m = 2 \\ 3 & ; \quad \left(m = 2 \text{ و } n \geq 4\right) \\ & \quad \text{or } (n = 2 \text{ و } m \geq 4) \\ 4 & ; \quad m \geq 4 \text{ و } n \geq 4 \end{cases}$$

❖ في حالة n و m أحدهما زوجي والآخر فردي:

$$\chi'(PP_{n,m}) = \begin{cases} 1 & ; \quad n = 1 \text{ و } m = 2 \\ 3 & ; \quad \left(n = 2 \text{ و } m \geq 3\right) \\ & \quad \text{or } (m = 2 \text{ و } n \geq 4) \\ 4 & ; \quad n \geq 2 \text{ و } m \geq 3 \end{cases}$$

❖ في حالة n و m فرديان:

$$\chi'(PP_{n,m}) = \begin{cases} 2 & ; \quad n = 1 \text{ و } m > 3 \\ & \quad \text{or } (m = 1 \text{ و } n > 3) \\ 4 & ; \quad n \geq 3 \text{ و } m \geq 3 \end{cases}$$

4.4. المرحلة الرابعة (دراسة تلوين العقد لصف البيانات $PP_{n,m}$):

1.4.4. خوارزمية تلوين العقد من أجل أية قيمة ل n و m:

بما أنَّ البيان $PP_{n,m}$ هو عبارة عن نسخ أفقية من المسار P_n يربط بينها نسخ عمودية من المسار P_m فإننا سنقوم بتلوين العقد البيان بتلوين عقد المسـارات الأفقية بالتناوب مرة نطبق الخطوة الأولى ومرة نطبق الخطوة الثانية وهكذا حتى يتم تلوين جميع عقد البيان المدروس.

الخطوة الأولى: نُلون جميع عقد المسار الأفقي الأول P_n بالتناوب بالألوان 1,2 بدءاً من أول عقدة في المسار.

الخطوة الثانية: نُلون جميع عقد المسار الأفقي الثاني P_n بالتناوب بالألوان 2,1 بدءاً من أول عقدة في المسار.

2.4.4. الصيغة للعدد اللوني اللازم لتلوين عقد صف البيانات $PP_{n,m}$:

$$\chi(PP_{n,m}) = \begin{cases} 1 & ; \quad n = m = 1 \\ 2 & ; \quad (m \in N^* \text{ و } m \geq 1) \text{ or } (m \in N^* \text{ و } n > 1) \end{cases}$$

ولتوضيح ذلك نناقش كل حالة على حدا:

الحالة الأولى: من أجل $n = m = 1$:

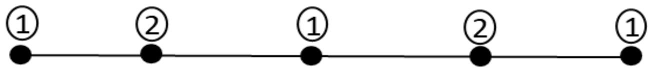
نحتاج إلى لون واحد لأن البيان الناتج البيان $PP_{1,1}$ يحوي عقدة واحدة فقط أي عقدة منعزلة.

الحالة الثانية: من أجل $(m \in N^* \text{ و } n > 1)$ or $(m \in N^* \text{ و } m \geq 1)$:

نحتاج إلى لونين لأن البيان الناتج إما يحوي مسار P_n حيث $n>1$ وحسب المبرهنة:

$$\chi(P_n) = 2 \qquad : n > 1$$

مثال: البيان $PP_{5,1}$ الموضح بالشكل بالتالي:



الشكل (27) يمثل البيان $PP_{5,1}$

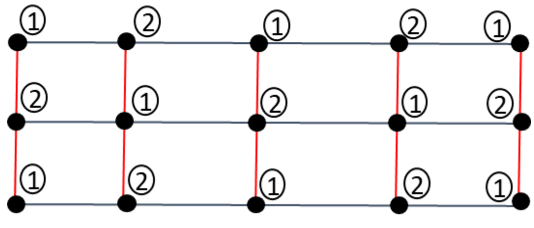
أو يحوي دورة زوجية C_n ويُلون بلونين وذلك حسب المبرهنة:

$$\chi(C_n) = 2 \qquad : n \text{ even}$$

مثال: البيان $PP_{5,3}$ ويعطى العدد اللوني اللازم لتلوين العقد بالعلاقة:

$$\chi(PP_{5,3}) = 2$$

إنَّ البيان $PP_{5,3}$ يحوي على دورة زوجية لذلك يُلون بلونين.



الشكل (28) يمثل البيان $PP_{5,3}$

5) خلاصة الفصل

تمكنَّا في هذا الفصل من تقديم دراسة متكاملة وتفصيلية لتلوين نوع جديد من البيانات وهو صف البيانات $PP_{n,m}$ تضَّمنت الدراسة إنتاج صــف البيانات $PP_{n,m}$ ثمَّ تطبيق جميع أنواع التلوين ومناقشــة كل نوع من أنواع التلوين على حدا ولنعرض أبرز النتائج التي حصلنا عليها:

- ❖ الحصول على نوع جديد من البيانات وهو صف البيانات $PP_{n,m}$ وذلك عن طريق الجداء الديكارتي للمسارين P_n و P_m.
- ❖ اقتراح خوارزمية تُعطينا التلوين الضلعي المستمر الأمثل للبيانات $PP_{n,m}$ تتضمن ثلاثة حالات حسب مرتبة كلاً من P_n و P_m.
- ❖ ينتج من البحث مباشـرةً التوصـل إلى نتيجتين يمكننا من خلالها تصـنيف البيانات من حيث قابليتها للتلوين الضـلعي المسـتمر بشكل مباشر وذلك بتمييز حالات مرتبة البيان $PP_{n,m}$ والتي تساوي nm.

__النتيجة الأولى__: إذا كان nm زوجياً فإن البيان $PP_{n,m}$ يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً.

__النتيجة الثانية__: إذا كان nm فردياً فإن البيان $PP_{n,m}$ أيضاً يقبل تلويناً ضلعياً مستمراً.

وأكثر من ذلك يُعطى العدد اللوني الضلعي المستمر للبيان $PP_{n,m}$ ككل حسب مرتبته nm بالعلاقة:

$$\chi'_C(PP_{n,m}) = \begin{cases} nm \text{ زوجي} & \begin{cases} \begin{cases} 1 & ; \ n = 2 \text{ و } m = 1 \\ 3 & ; \ (n = 2 \text{ و } m \geq 3) \\ & \quad \text{or } (m = 2 \text{ و } n \geq 4) \\ 4 & ; \ n \geq 2 \text{ و } m \geq 3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 & ; \ n = m = 2 \\ 3 & ; \ m = 2 \text{ و } n \geq 4 \\ & \quad \text{or } n = 2 \text{ و } m \geq 4 \\ 4 & ; \ m \geq 4 \text{ و } n \geq 4 \end{cases} \end{cases} \\ nm \text{ فردي} & \begin{cases} 2 & ; \ n = 1 \text{ و } m > 3 \\ & \quad \text{or } (m = 1 \text{ و } n > 3) \\ 4 & ; \ n \geq 3 \text{ و } m \geq 3 \end{cases} \end{cases}$$

- ❖ العدد اللوني للأضلاع هو نفسه العدد اللوني الضلعي المستمر وبتطبيق نفس الخوارزميات نحصل على تلويناً للأضلاع.
- ❖ دراسة تلوين العقد لصف البيانات $PP_{n,m}$ حيث تمكنَّا من اقتراح خوارزمية لتلوين العقد ووضع الصيغة العامة التي تعطينا العدد اللوني لتلوين العقد.
- ❖ تزويد الفصل بالعديد من الأمثلة الشارحة للبحث لجميع أنواع التلوين.

6) مراجع البحث:

[1] ALHALABI, M-F., (2016) An Algorithm for Continuously Edg Coloring a Set of Graphs, Albaath Magazine. 75-105. (in Arabic)
[2] JONAYHAN L. GROSS, (2014). Graph Theory. Graph operation. Colombia university New York, USA, p15-20.
[3] CHARTAND, G., & Zhang, P., (2009). Chromatic Graph Theory. (1^{st}Ed). U.S. A: CRC Press.
[4] ALNAJAAR, H., (2008)- Graph Theory. Directorate of Book and Public publications. Aleppo. (in Arabic)
[5] Wallis, W.D, (2007). A Beginner's Guide to Graph Theory. (2^{nd}Ed). Bosten: Birkhäuser.
[6] ALMOSAAED, A.L., (2005)-Introduction to Graph Theory. Scientific Publishing and Printing. Kingdom Saudi Arabia. (in Arabic)
[7] BYSKOV, J.M., (2004). Enumerating Maximal Independent sets with Application to Graph Coloring, Operations Research Letters, 32 (6): 547-556.
[8] XU, J., (2003)- Theory and Application of Graphs. (1^{st} Ed.). U.S.A: Kluwer Academic.
[9] DIESTAL, R., (2000)- Graph Theory. (3^{rd} Ed.). New York: Springer.
[10] BOLLOBAS, B., (1998)- Modern Graph Theory. (1^{st}Ed). Memphis: Springer.
[11] JENSEN, T. R., &Toft, B., (1995)- Graph Coloring Problems. Canada: John Willy & Sons. Inc.
[12] WILSON, R. J., (1996)- Introduction to Graph Theory. (4^{1h} Ed.). Malasyia: Longman LTD.
[13] HOLYER, I., (1981). The NP-completeness of Edge-coloring, SIAM Journal on Computing, 10(4) ,718-720.
[14] BRELAZ, D., (1979). New Methods to Color the Vertices of a Graph Communications of the ACM, 22(4), 251-256.
[15] HALLDORSON, M. M., (1993). A Still Better Performance Guarantee for Approximate Graph, Information Processing Letters, The Netherlands, 45(1), 19-23.

[16] سمحان، معروف عبد الرحمن ، وشراري، أحمد حميد. (2005). مبادئ الرياضيات المتقطعة. المملكة العربية السعودية: النشر العلمي والمطابع.