حل المعادلات التفاضلية باستعمال التحويل الطبيعي المعدل

محسن أحمد الحسون[1*] خليل حسن يحيى محمد محمود عامر[3]

[1] طالب دراسات عليا، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق.
mohsen.alhassoun@damascusuniversity.edu.sy
[2] أستاذ في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق. khalil.yehia@damascusuniversity.edu.sy
[3] أستاذ في قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث. amer09656@gmail.com

الملخص:

في هذا البحث قمنا بتعريف النسخة المعدلة التحويل الطبيعي، واستنتجنا العلاقة الثنائية بين تحويل سومودو والتحويل الطبيعي المعدل وبالعكس، وقمنا بإثبات صحة هذه العلاقة، واستنتجنا أهم العلاقات والنتائج الخاصة بتحويلات الدوال الأكثر شيوعاً في مسائل الشروط للمعادلات التفاضلية، واستنتجنا أهم التحويلات الخاصة بأكثر الدوال استخداماً في مسائل المعادلات التفاضلية لتحويل سومودو بدلالة التحويل الطبيعي المعدل من خلال العلاقة الثنائية بينهما. أيضاً قدمنا تطبيقات لهذه العلاقة في المعادلات التفاضلية العادية والجزئية ذات معاملات ثابتة ومتغيرة، والمعادلات التكاملية–التفاضلية، حيث إن من خلال استخدام هذه العلاقة استطعنا الانتقال إلى معادلة جبرية بشكل مباشر.

الكلمات المفتاحية: تحويل سومودو، التحويل الطبيعي المعدل، معادلة تفاضلية، معادلة تكاملية–تفاضلية.

تاريخ الإيداع: 2023/12/03
تاريخ الموافقة: 2024/03/27

ISSN (online): 2789-6366
http://journal.damascusuniversity.edu.sy/index.php/index/index

Solving Differential Equations Using the Modified Natural Transform

Mohsen Ahmad Alhassoun*[1], Khalil Hasan Yahya[2], Mohammad Mahmoud Amer[3]

Graduate Student. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University. mohsen.alhassoun@damascusuniversity.edu.sy
Prof. Department of Mathematics, Faculty of Science, Damascus University.
khalil.yehia@damascusuniversity.edu.sy
Prof. Department of Mathematics, Faculty of Science, Albaath University.
amer09656@gmail.com

Abstract

In this manuscript, we define the modified natural transform, then we deduced the duality relationship between the Sumudu transform and the modified natural transform.

Also, we prove this relationship, and we are deducing the most important relationships and results related to the solution of differential equations.

Lastly, we conclude the most important special transform of the modified natural transform and compared them with the transform of the Sumudu transform.

We also present applications for this relationship in ordinary and partial differential equations with constant and variable coefficients, and integral-differential equations, where using this the relationship we move to an algebraic equation directly.

Keywords: Sumudu transform, modified natural transform, differential equation, integro-differential equation.

Received :03/12/2023
Accepted: 27/03/2024

مقدمة:

واحدة من أهم الطرق المستخدمة لمسائل الشروط ذات القيم الابتدائية أو ذات القيم الحديّة هي طريقة التحويلات التكاملية حيث إن للمعادلات التفاضلية تطبيقات عديدة في الاقتصاد والطب وسوق المال وعلوم المواد وعلم الفلك وكذلك في الهندسة[3-1] .

في عام 2008 قدم الباحثان Khan, Z.H., Khan, W.A. [4] التحويل الطبيعي الذي يعدّ تحويلاً تكاملياً مشابهاً لتحويل لابلاس وتحويل سومودو، حيث إن هذا التحويل يتقارب مع تحويل لابلاس وتحويل سومودو فقط عن طريق تغيير المتحولات. بالنظر إلى هذا التقارب نلاحظ أن للتحويل الطبيعي جميع الجوانب المطبقة لكلٍ من التحويلين [14-6]. وفي عام 2012 قدم الباحثان Belgacem, F. B. M , Silambarasan, R [5] نظرية تفصيلية وتطبيقات للتحويل الطبيعي.

في هذا البحث، قمنا بتعريف النسخة المعدلة التحويل الطبيعي وإثبات أنّ العلاقة الثنائية بين التحويل الطبيعي المعدلّ وتحويل سومودو يمكن أن تحل بفاعلية وسهولة ودقة تامة فئة كبيرة من المعادلات التفاضلية، كما تم تطبيق هذه العلاقة بنجاح على المعادلات التكاملية والمعادلات التفاضلية الجزئية والمعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة والمتغيرة.

1. أهمية وهدف البحث:

يكمن الهدف الرئيسي من هذا البحث في تسليط الضوء على العلاقة الثنائية بين التحويل الطبيعي المعدل وتحويل سومودو وخصائصها وبعض التحويلات الخاصة للدوال الأكثر شيوعاً في مسائل الشروط، وكيفية إيجاد التحويل الطبيعي المعدل لأي دالة بواسطة هذه العلاقة –دون الحاجة إلى إيجاد تكاملات– اعتماداً على جدول تحويلات سومودو.

2. طرائق البحث: تعاريف ومفاهيم أساسية:

1.3. تعاريف: لتكن ^{2} ، خ $f(x)$ وليكن A صف الدوال المعرّفة بالشكل:

$$\mathcal{A} = \left\{ f(x) \mid \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, \left| f(x) \right| < M \exp\left(\frac{|x|}{\tau_i} \right), \text{ if } x \in (-1)^i \times [0, \infty) \right\}$$

1.1.3. تعريف (تحويل سومودو)[1]: نسمي التحويل $\mathrm{S}[f(x)] = S(s)$ ، تحويل سومودو المعرّف وفق العلاقة التكاملية:

$$\mathbb{S}[f(x)] = \int_0^\infty f(sx) e^{-x} dx = S(s) \ , s \in (\tau_1, \tau_2) \qquad \ldots(1)$$

2.1.3. تعريف (التحويل الطبيعي)[5]: نسمي التحويل $\mathrm{N}(s,u) = ¥[f(x)]$ ، التحويل الطبيعي المعرّف وفق العلاقة التكاملية:

$$\mathbb{N}[f(x)] = \int_0^\infty f(sx)e^{-ux}dx = \mathcal{N}(s,u)\ ,\mathrm{Re}(u) > 0, s \in (\tau_1, \tau_2) \qquad \ldots(2)$$

سنعرض الآن تعريفاً للنسخة المطورة من التحويل الطبيعي حيث أسميناه بالتحويل الطبيعي المعدل:

3.1.3. تعريف (التحويل الطبيعي المعدل): نسمي التحويل $\mathrm{M}(su,u) = \mathrm{M}[f(x)]$ ، التحويل الطبيعي المعدل المعرّف وفق العلاقة التكاملية:

$$\mathbb{M}[f(x)] = \int_0^\infty f(sux)e^{-ux}dx = \mathcal{M}(su,u) \quad ,\mathrm{Re}(u) > 0, s \in (\tau_1, \tau_2) \qquad \ldots(3)$$

3.2. التحويل الطبيعي المعدل والمعادلات التفاضلية العادية:

سنقدم فيما يلي مبرهنة تصف العلاقة بين تحويل سومودو والتحويل الطبيعي المعدل

1.3.2. مبرهنة (العلاقة بين تحويل سومودو والتحويل الطبيعي المعدل): إذا كان $S(s)$ تحويل سومودو و $\mathrm{M}(su,u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة $f(x)$ ، عندئذٍ فإنّ:

$$S(s) = u\mathcal{M}(su,u) \qquad \ldots(4)$$

<u>الإثبات.</u>

باستعمال تعريف تحويل سومودو:

$$S(s) = \int_0^\infty f(sx)e^{-x}dx$$

بوضع $dx = udt$ و $x = ut$ ، نعوض في العلاقة السابقة فنجد:

$$S(s) = \int_0^\infty f(sut)e^{-ut}udt$$
$$S(s) = u\int_0^\infty f(sut)e^{-ut}dt$$
$$S(s) = u\mathcal{M}(su,u)$$

فيما يلي نعرض تحويل سومودو لمشتقات الدوال بدلالة التحويل الطبيعي المعدل من خلال العلاقة بين التحويلين

2.3.2. مبرهنة (التحويل الطبيعي المعدل لمشتقات الدوال): إذا كان $S(s)$ تحويل سومودو و $\mathrm{M}(su,u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة $f(x)$ ، عندئذٍ فإنّ:

$$\text{(a)} \quad \mathbb{S}[f'(x)] = \frac{u}{s}\mathcal{M}(su,u) - \frac{1}{s}f(0) \qquad \ldots(5)$$

$$\text{(b)} \quad \mathbb{S}[f''(x)] = \frac{u}{s^2}\mathcal{M}(su,u) - \frac{1}{s^2}f(0) - \frac{1}{s}f'(0) \qquad \ldots(6)$$

$$\text{(c)} \quad \mathbb{S}[f^{(n)}(x)] = \frac{u}{s^n}\mathcal{M}(su,u) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n} f^{(k)}(0) \qquad \ldots(7)$$

<u>الإثبات.</u>

أولاً، إثبات الخاصيّة (a):

$$\mathbb{S}[f(x)] = \int_0^\infty f(sx)e^{-x}dx$$

$$\mathbb{S}[f'(x)] = \int_0^\infty f'(sx)e^{-x}dx$$

باستعمال التكامل بالتجزئة، نجد:

$$\mathbb{S}[f'(x)] = \left[\frac{1}{s}f(sx)e^{-x}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(sx)e^{-x}\,dx$$

$$\mathbb{S}[f'(x)] = -\frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(sx)e^{-x}\,dx \qquad \ldots(*)$$

بوضع $dx = udt$ ق $x = ut$ ، فتكون قيم t تتحول من 0 إلى ¥+ ، نعوض في (*) فنجد:

$$\mathbb{S}[f'(x)] = -\frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(sut)e^{-ux}\,udt$$

$$\mathbb{S}[f'(x)] = -\frac{1}{s}f(0) + \frac{u}{s}\mathcal{N}(su,u)$$

$$\mathbb{S}[f'(x)] = \frac{u}{s}\mathcal{M}(su,u) - \frac{1}{s}f(0)$$

ثانياً، إثبات الخاصيّة (b):

$$\mathbb{S}[f(x)] = \int_0^\infty f(sx)e^{-x}dx$$
$$\mathbb{S}[f''(x)] = \int_0^\infty f''(sx)e^{-x}dx$$

باستعمال التكامل بالتجزئة، نجد:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[f''(x)] &= \left[-\frac{1}{s}f'(sx)e^{-x}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f'(sx)e^{-x}\,dx \\ &= -\frac{1}{s}f'(0) + \frac{1}{s}\mathbb{S}[f'(x)] \\ \mathbb{S}[f''(x)] &= -\frac{1}{s}f'(0) + \frac{1}{s}\left[\frac{u}{s}\mathcal{M}(su,u) - \frac{1}{s}f(0)\right]\end{aligned}$$

$$\mathbb{S}[f''(x)] = \frac{u}{s^2}\mathcal{M}(su,u) - \frac{1}{s^2}f(0) - \frac{1}{s}f'(0)$$

ثالثاً، إثبات الخاصيّة (c):

باستعمال تعريف تحويل سومودو للدالة $f^{(n)}(x)$ نجد:

$$\mathbb{S}[f^{(n)}(x)] = \frac{1}{s^n}S(s) - \frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n-1}s^k f^{(k)}(0) = s^{-n}\left[S(s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^k f^{(k)}(0)\right]$$

وبالاستفادة من العلاقة بين تحويل سومودو والتحويل الطبيعي المعدل نجد:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[f^{(n)}(x)] &= s^{-n}\left[u\mathcal{M}(su,u) - \sum_{k=0}^{n-1}s^k f^{(k)}(0)\right] \\ &= \frac{u}{s^n}\mathcal{M}(su,u) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{k-n}f^{(k)}(0)\end{aligned}$$

الآن، سنعرض مبرهنة تصف العلاقة بين التحويل الطبيعي المعدل وتحويل سومودو

3.3.2.مبرهنة (العلاقة بين التحويل الطبيعي المعدل وتحويل سومودو): ليكن $S(s)$ تحويل سومودو، عندئذٍ فإن التحويل الطبيعي المعدل $\mathrm{M}[f(x)]$ للدالة $f(x)$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{M}[f(x)] = \mathcal{M}(su,u) = \frac{1}{u}S(s) \qquad \dots(8)$$

الإثبات.

لتكن $f(x) \in A$ عندئذٍ فإنه من أجل $\mathrm{Re}(u) > 0, s \in (t_1, t_2)$ يكون

$$\mathcal{M}(su,u) = \int_0^\infty f(sux)e^{-ux}dx$$

بوضع $ux = t \Rightarrow udx = dt$ ، فتكون قيم t تتحول من 0 إلى $+\infty$، نعوض في العلاقة السابقة فنجد:

$$\mathcal{M}(su,u) = \int_0^\infty f(sux)e^{-ux}dx = \int_0^\infty f(st)\,e^{-t}\,\frac{1}{u}\,dt = \frac{1}{u}\int_0^\infty f(st)\,e^{-t}dt = \frac{1}{u}S(s)$$

4.3.2. مبرهنة: ليكن $\mathrm{M}(su,u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة $f(x) \in A$ ، عندئذٍ فإن تحويل سومودو للدالة $xf(x)$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{S}[x\,f(x)] = u\,\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} - su\mathcal{M}(su,u) \qquad \dots(9)$$

الإثبات.

بما أن الدالة $f(x) \in A$ ، فإنّ الدالة $xf(x) \in A$ أيضاً. بالمكاملة بالتجزئة نجد:

$$\mathbb{S}[x\,f(x)] = \int_0^\infty sx\,f(sx)\,e^{-x}dx = s\int_0^\infty \frac{d}{dx}[x\,f(sx)]e^{-x}dx - s[x\,f(sx)\,e^{-x}]_0^\infty$$

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[x\,f(x)] &= s\int_0^\infty \frac{d}{dx}[x\,f(sx)]e^{-x}\,dx = s\int_0^\infty [f(sx) + sx\,f'(sx)]\,e^{-x}dx \\ &= s\int_0^\infty f(sx)e^{-x}dx + s\int_0^\infty sx\,f'(sx)\,e^{-x}dx\end{aligned}$$

بوضع $x = ut \Rightarrow dx = udt$ ، فتكون قيم t تتحول من 0 إلى $+\infty$، نعوض في العلاقة السابقة فنجد:

$$\begin{aligned}&= su\int_0^\infty f(sut)e^{-ut}dt + s^2u\int_0^\infty ut\,f'(sut)\,e^{-ut}dt \\ &= su\mathcal{M}(su,u) + s^2u\,\frac{d}{ds}\,\mathcal{M}(su,u)\end{aligned}$$

$$= -su\mathcal{M}(su,u) + 2su\mathcal{M}(su,u) + s^2 u \frac{d}{ds}\mathcal{M}(su,u)$$
$$= -su\mathcal{M}(su,u) + u\left[2s\mathcal{M}(su,u) + s^2 \frac{d}{ds}\mathcal{M}(su,u)\right]$$

وبالتالي يكون:

$$\mathbb{S}[x\, f(x)] = u\,\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} - su\mathcal{M}(su,u)$$

5.3.2. نتائج: سنقدم بعض التحويلات للدوال الأكثر شيوعاً في مسائل الشروط، وهي بمثابة توسيع للمبرهنة السابقة:

- $$\mathbb{S}[x\, f'(x)] = u\mathcal{M}(su,u) - f(0) \qquad \ldots(10)$$
  $$\mathbb{S}[xf'(x)] = -2u\mathcal{M}(su,u) + \frac{u}{s}\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} \qquad \ldots(11)$$

- $$\mathbb{S}[x^2\, f'(x)] = 2su\mathcal{M}(su,u) - 2u\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} + u\frac{d^2(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds^2} \qquad \ldots(12)$$
  $$\mathbb{S}[x^2\, f'(x)] = 3su\mathcal{M}(su,u) - 3sf(0) - s^2 f'(0) \qquad \ldots(13)$$

- $$\mathbb{S}[x^3\, f'(x)] = 13s^2u\mathcal{M}(su,u) - 13s^2 f(0) - 7s^3 f'(0) - s^4 f''(0) \qquad \ldots(14)$$
  $$\mathbb{S}[x^3\, f'(x)] = s^3 u\frac{d^3(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds^3} \qquad \ldots(15)$$

- $$\mathbb{S}[xf''(x)] = \frac{u}{s^2}\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} - \frac{3u}{s}\mathcal{M}(su,u) - \frac{3}{s}f(0) - \frac{3}{s}f'(0) \qquad \ldots(16)$$

- $$\mathbb{S}[x^2 f''(x)] = 6u\mathcal{M}(su,u) - \frac{4u}{s}\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} + u\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds^2} \qquad \ldots(17)$$
  $$\mathbb{S}[x^2 f''(x)] = u\mathcal{M}(su,u) - f(0) - sf'(0) \qquad \ldots(18)$$

- $$\mathbb{S}[x^3 f'''(x)] = u\mathcal{M}(su,u) - f(0) - sf'(0) - s^2 f''(0) \qquad \ldots(19)$$

- $$\mathbb{S}[x^3 f'''(x)] = -24u\mathcal{M}(su,u) + \frac{18u}{s}\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} - 6u\frac{d^2(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds^2} + su\frac{d^3(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds^3} \qquad \ldots(20)$$

في المبرهنة التالية، سنعرض الحالة العامة لتحويل سومودو للدالة $x^n f^{(n)}(x)$ من أجل كل ¥ خ n بدلالة التحويل الطبيعي المعدل

6.3.2. مبرهنة: ليكن $M[f(x)] = M(su, u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة A خ $f(x)$ ، عندئذٍ فإن تحويل سومودو للدالة $x^n f^{(n)}(x)$ من أجل كل ¥ خ n يعطى بالشكل:

$$\mathbb{S}[x^n f^{(n)}(x)] = u\mathcal{M}(su,u) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(k)}(0) \qquad \ldots(21)$$

7.3.2. مبرهنة: ليكن $M[f(x)] = M(su, u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة A خ $f(x)$ ، عندئذٍ فإن التحويل الطبيعي المعدل العكسي للدالة $f(x)$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{M}^{-1}[\mathcal{M}(su,u)] = f(x)$$

3.3. التحويل الطبيعي المعدل والمعادلات التفاضلية الجزئية:

يمكن استعمال العلاقة الثنائية بين التحويل الطبيعي المعدل وتحويل سومودو لحل المعادلات التفاضلية الجزئية، لتوضيح الفكرة الأساسية لهذه الطريقة، نتأمل الشكل الخطي العام للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Phi(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \ldots(22)$$

مع الشرط الابتدائي

$$\Phi(x,0) = f(x)$$

حيث $f(x)$ دالة تحليلية معطاة.

1.3.3. مبرهنة: ليكن $M[f(x)] = M(su, u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة A خ $f(x)$ ، عندئذٍ فإن تحويل سومودو للدالة $\frac{¶ F(x,t)}{¶ t}$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{u}{s}\mathcal{M}(x,su,u) - \frac{1}{s}f(x,0) \qquad \ldots(23)$$

2.3.3. مبرهنة: ليكن $\mathcal{M}[f(x)] = \mathcal{M}(su,u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة $f(x) \in \mathcal{A}$ ، عندئذٍ فإن تحويل سومودو للدالة $\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2}$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2}\right] = \frac{u}{s^2}\mathcal{M}(x,su,u) - \frac{1}{s^2}f(x,0) - \frac{1}{s}\frac{\partial f(x,0)}{\partial t} \qquad \ldots(24)$$

3.3.3. مبرهنة: ليكن $\mathcal{M}[f(x)] = \mathcal{M}(su,u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة $f(x) \in \mathcal{A}$ ، عندئذٍ فإن تحويل سومودو للدالة $\frac{\partial^n F(x,t)}{\partial t^n}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial^n F(x,t)}{\partial t^n}\right] = \frac{u}{s^n}\mathcal{M}(x,su,u) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{s^{k+1}}\frac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} \qquad \ldots(25)$$

4.3.3. مبرهنة: ليكن $\mathcal{M}[f(x)] = \mathcal{M}(su,u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدالة $f(x) \in \mathcal{A}$ ، عندئذٍ فإن تحويل سومودو للدالة $\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2}$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{S}\left[\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2}\right] = u\,\frac{\partial^2 \mathcal{M}(x,su,u)}{\partial x^2} \qquad \ldots(26)$$

3.4. التحويل الطبيعي المعدل والمعادلات التكاملية–التفاضلية:

1.3.4. مبرهنة الطي: ليكن $\mathcal{M}[f(t-x)] = \mathcal{M}_f(su,u)$ و $\mathcal{M}[g(x)] = \mathcal{M}_g(su,u)$ التحويل الطبيعي المعدل للدوال $f(t-x), g(x) \in \mathcal{A}$ ، عندئذٍ فإن تحويل سومودو للدالة $\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx$ يعطى بالشكل:

$$\mathbb{S}\left[\int_0^t f(t-x)g(x)\,dx\right] = s\,u^2 \cdot \mathcal{M}_f(su,u)\cdot\mathcal{M}_g(su,u) \qquad \ldots(27)$$

3.5. تطبيقات على المعادلات التفاضلية:

1.3.5. مثال: حل المعادلة التفاضلية العادية الآتية:

$$y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad , \quad t > 0$$

الحل.

بتطبيق العلاقات $(4),(6),(10)$ على المعادلة نجد:

$$\frac{u}{s^2}\mathcal{M}(su,u) - \frac{1}{s^2}f(0) - \frac{1}{s}f'(0) + u\mathcal{M}(su,u) - f(0) - u\mathcal{N}(su,u) = 0$$

بتعويض الشروط الابتدائية في المعادلة السابقة نجد:

$$\mathrm{M}(su,u) = \frac{s}{u}$$

بتطبيق التحويل الطبيعي المعدل العكسي نجد:

$$\mathrm{M}^{-1}[\mathrm{M}(su,u)] = \mathrm{M}^{-1}[\frac{s}{u}]$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو $y(t) = t$.

2.3.5. مثال: حل المعادلة التفاضلية العادية الآتية:

$$t^2y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0$$

الحل.

بتطبيق العلاقات $(4),(11),(17)$ على المعادلة نجد:

$$6u\mathrm{M}(su,u) - \frac{4u}{s}\frac{d(s^2\mathrm{M}(su,u))}{ds} + u\frac{d^2(s^2\mathrm{M}(su,u))}{ds^2}$$
$$- 4u\mathrm{M}(su,u) + \frac{2u}{s}\frac{d(s^2\mathrm{M}(su,u))}{ds} - 2u\mathrm{M}(su,u) = 0$$

بالإصلاح نجد:

$$\frac{d^2(s^2\mathrm{M}(su,u))}{ds^2} = \frac{2}{su}\frac{d(s^2\mathrm{M}(su,u))}{ds}$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\frac{d^2(s^2\mathrm{M}(su,u))}{ds^2}}{\frac{d(s^2\mathrm{M}(su,u))}{ds}} = \frac{2}{su}$$

بمكاملة طرفي العلاقة نجد:

$$\ln\left(\frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds}\right) = \ln c_1\frac{s^2}{u} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(s^2\mathcal{M}(su,u))}{ds} = \frac{c_1 s^2}{u}$$

بالمكاملة نجد:

$$s^2\mathrm{M}(su,u) = \frac{c_1}{3}\frac{s^3}{u} + c_2$$

بوضع $c_2 = 0$ نجد:

$$\mathrm{M}(su,u) = \frac{c_1}{3}\frac{s}{u} + c_2$$

بتطبيق التحويل الطبيعي المعدل العكسي نجد:

$$\mathrm{M}^{-1}[\mathrm{M}(su,u)] = \mathrm{M}^{-1}[\frac{c_1}{3}\frac{s}{u}]$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو $y(t) = \frac{c_1}{3}t$

3.3.5. مثال: حل المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية:

$$u_{tt} = \frac{x^2}{2}u_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

مع الشروط الابتدائية

$$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 0$$

الحل.

بتطبيق العلاقتين $(24),(26)$ على المعادلة نجد:

$$\frac{u}{s^2}\mathcal{M}(x,su,u)-\frac{1}{s^2}f(x,0)-\frac{1}{s}\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}=\frac{x^2}{2}\cdot u\frac{\partial^2\mathcal{M}(x,su,u)}{\partial x^2}$$

بتعويض الشروط الابتدائية نجد:

$$\frac{u}{s^2}\mathcal{M}(x,su,u)-\frac{x^2}{s^2}=\frac{x^2}{2}\cdot u\frac{\partial^2\mathcal{M}(x,su,u)}{\partial x^2}$$

بالإصلاح نجد:

$$\frac{\partial^2\mathcal{M}(x,su,u)}{\partial x^2}-\frac{2}{s^2x^2}\mathcal{M}(x,su,u)+\frac{2}{s^2u}=0$$

بحل المعادلة السابقة باستعمال الطرق المألوفة، نحصل على التحويل الطبيعي المعدل للمعادلة السابقة بالشكل:

$$\mathcal{M}(x,su,u)=x^2\left[\frac{1}{u(1-s^2)}\right]$$

بتطبيق التحويل الطبيعي المعدل العكسي نجد:

$$\mathbb{M}^{-1}[\mathcal{M}(x,su,u)]=x^2\mathbb{M}^{-1}\left[\frac{1}{u(1-s^2)}\right]$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو $u(x,t)=x^2\cosh(t)$.

4.3.5. مثال: حل المعادلة التكاملية–التفاضلية الآتية:

$$t^3\,y'''(t)+y(t)+\int_0^t(t-x)y(x)\,dx=1+t^3\sin t,$$
$$y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=-1$$

الحل.

بتطبيق العلاقتين $(4),(19),(27)$ على المعادلة نجد:

$$u\mathcal{M}(su,u)-f(0)-sf'(0)-s^2f''(0)+u\mathcal{M}(su,u)$$
$$+s^2u\mathcal{M}(su,u)=1+\frac{24s^4(1-s^2)}{(1+s^2)^4}$$

بتطبيق الشرط الابتدائي نجد:

$$u\mathcal{M}(su,u)-1+s^2+u\mathcal{M}(su,u)+s^2u\mathcal{M}(su,u)=1+\frac{24s^4(1-s^2)}{(1+s^2)^4}$$

بالإصلاح نجد:

$$\mathrm{M}\,(su,u)=\frac{1}{u(1+s^2)}$$

بتطبيق التحويل الطبيعي المعدل العكسي نجد:

$$\mathbb{M}^{-1}[\mathcal{M}(su,u)]=\mathbb{M}^{-1}\left[\frac{1}{u(1+s^2)}\right]$$

ويكون حل المعادلة التكاملية–التفاضلية المعطاة هو $y(t)=\cos t$.

5. الاستنتاجات والتوصيات

في هذا البحث، قمنا بإيجاد العلاقة بين التحويل الطبيعي المعدل وتحويل سومودو وتطبيق هذه العلاقة على المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية–التفاضلية، نوصي بتطبيق العلاقة الثنائية بين التحويل الطبيعي المعدل وتحويل سومودو على المعادلات التفاضلية ذات المراتب الكسرية.

معلومات التمويل:

هذا البحث ممول من جامعة دمشق وفق رقم التمويل (501100020595).

شكر:

لقد ساهم في إعداد هذا البحث الدكتور أحمد محمد عبد العال عبد الله، جمهورية مصر العربية، نتوجه له بالشكر الجزيل لما قدمه.

6. المراجع

[1] M. A. Asiru, 2001-Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, no. 6, 906–910.

[2] M. A. Asiru, 2010-Further properties of the sumudu transform and its applications, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 33 (2010), no. 3, 441–449.

[3] R. P. Briones, 2020-On the solution of partial differential equations using the Sumudu transform, International Journal of Mathematical Analysis, 14, no. 8, 389–395.

[4] Z.H., Khan, W.A., Khan, 2008-N-Transform-Properties and Applications, NUST Journal of Engineering Sciences 1, 127–133.

[5] F. B. M, Belgacem, and R, Silambarasan, 2012-Theory of the Natural transform. Mathematics in Engg Sci and Aerospace (MESA) journal. Vol. 3. No. 1. pp 99–124.

[6] F. B. M, Belgacem, and R, Silambarasan, 2012-Advances in the Natural transform. AIP Conference Proceedings. Vol. 1493.

[7] R, Silambarasan, and F. B. M, Belgacem 2012-Applications of the Natural transform to Maxwell's Equations. 12–16.

[8] A. Kilicman and H. E. Gadain, 2010-On the applications of laplace and sumudu transforms, Journal of Franklin Institute, 347, 848-862.

[9] R. Saadeh, A. Qazza and A. Burqan, 2020-A New Integral Transform: ARA Transform and Its Properties and Applications, Symmetry 12, no. 6, 925-940.

[10] S. Samuel and V. Gill, 2018-Natural transform method to solve nonhomogeneous fractional ordinary differential equations, Progress in Fractional Differentiation and Applications 4, no. 1, 49-57.

[11] A. A. Soliman, K. R. Raslan and A. M. Abdallah, 2021-Analysis for fractional integro-differential equation with time delay, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 46, 989-1007.

[12] A. A. Soliman, K. R. Raslan and A. M. Abdallah, 2021-On some modified methods on fractional delay and nonlinear integro-differential equation, Sound Vibration 55, no. 4, 263-279.

[13] A. A. Soliman, K. R. Raslan and A. M. Abdallah, 2022-Ramadan Group Transform Fundamental Properties and Some its Dualities. In: Joshi, S., Bairwa, A.K., Nandal, A., Radenkovic, M., Avsar, C. (eds) Cyber Warfare, Security and Space Research. SpacSec 2021. Communications in Computer and Information Science 1599, 294-302.

[14] A. A. Soliman, K. R. Raslan and A. M. Abdallah, 2022-On Fractional Integro-Differential Equation with Nonlinear Time Varying Delay, Sound and Vibration 56, no.2, 147-163.