استخدام مبرهنة "Cayley–Hamilton" وتمهيدية "Nakayama" في دراسة العلاقة بين الحلقات الناظمية وحلقات التقييم

د. شوقي محمد الراشد*

الملخص

يعرض هذا البحث تطبيقاً لمبرهنة "Cayley–Hamilton" وتمهيدية "Nakayama" في دراسة العلاقة بين الحلقات الناظمية "Normal Rings" وحلقات التقييم "Valuation Rings"، حيث إنه تم عرض فكرة عامة عن أهمية الحلقات الناظمية وحلقات التقييم وتعاريف ومفاهيم أساسية من الجبر التبادلي في الفقرة الأولى (المقدمة)، وفي الفقرة الثانية مبرهنة "Cayley–Hamilton" وتمهيدية "Nakayama" في المودولات (المقاسات) منتهية التوليد؛ فضلاً عن مفهوم التموضع "Localization" لحلقة عند مثالي أولي فيها. في الفقرة الثالثة تم الإثبات على أن حلقة التموضع لمنطقة تحليل وحيد عند مثالي موّلد بعنصر أولي منها تُشكل حلقة تقييم، وذلك من خلال المبرهنة (3–5)، وفي الجزء الأخير من هذه المقالة مبرهنة (4–1) تبيّن أن كل حلقة تقييم هي حلقة ناظمية، ومن ثم مثال يبيّن أن العكس ليس صحيحاً بالضرورة، ولإثبات العكس تم استخدام مفهوم المثالي الابتدائي "$\mu - Primary$" و مبرهنة "Cayley–Hamilton" وتمهيدية

* دكتور محاضر مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة، عضو هيئة تدريسية في كلية العلوم – جامعة دمشق.

"Nakayama" و ذلك من خلال المبرهنة (4–3)، ومن ثم عرض نتيجة (4–4) تبيّن أن كل مثالي غير صفري في الحلقة الناظمية يُكتب كقوة لمثالي أعظمي، وذلك بالاستفادة من الشروط في المبرهنة (4–3).

الكلمات المفتاحية: حلقة ناظمية، مبرهنة "Cayley–Hamilton"، تمهيدية"Nakayama"، حلقة تقييم.

التصنيف الرياضياتي العالمي (2010): **13A18** .

Use Cayley-Hamilton's Theorem and Nakayama's Lemma to Study the Relationship between the Normal Rings and Valuation Rings

Dr. Shawki. M. AL Rashed*

Abstract

This paper presents an application of the Cayley-Hamilton's theorem and Nakayama's lemma to study the relationship between the normal rings and valuation rings, where it is introduced some of the definitions and basic properties from commutative algebra in the first section (introduction), in the second section was presented the Cayley-Hamilton's theorem and Nakayama's lemma for finitely generated modules and a general ideal about the localization of a ring at a prime ideal. In the third section, it is proven theorem (3-5) that the localization of an unique factorization domain at an ideal generated by a prime element from this domain will be a valuation ring. In the last section it is presented in the theorem (4-1) that every valuation ring will be a normal ring and an example shows that the inverse is not true, then use the concept of the primary ideal, local ring, Cayley-Hamilton's theorem and Nakayama's lemma in theorem (4-3) to prove that every normal ring will be a valuation ring, then it is presented a result (4-4) which shows that every non-zero ideal in normal ring is written as a power ofa maximal ideal, by using the conditions in theorem (4-3).

*Doctor associated Lecturer at Arab International University, and Academic Staff at Damascus University. Faculty of Science – Damascus University

Key words: Normal Ring, Cayley-Hamilton's Theorem, Nakayama's Lemma, Valuation Ring.

Mathematics Subject Classification 2010: **13A18**.

1. مقدمة:

إن أهمية حلقات التقييم في الجبر المجرد تكمن في إعطاء تقييم لعناصر حلقة، حيث إن بعض الأبحاث عرضت العلاقة بين حلقات التقييم و أنواعاً أخرى من الحلقات، وذلك لسهولة التعامل معها (مثلاً [1] عرض دراسة العلاقة بين حلقات التقييم المتقطع و حلقات التموضع).

كما أن أهمية الحلقات الناظمية تكون في دراسة المتنوعات الآفينية أو ما تُسمى المجموعات الجبرية "Affine Varieties" أو "Algebraic Sets"، حيث إن المجموعة الجبرية ناظمية إذا كانت أي نقطة منها ناظمية، أي إن حلقة التموضع لهذه الحلقة عند هذه النقطة تكون منطقة مغلقة جبرياً، وهذا ما يُساعد في دراسة بعض الخواص الجبرية والتبولوجيا في جوار مغلق جبرياً لهذه النقطة. أما هذا البحث فهو يقدم دراسة حول العلاقة بين هذه المفاهيم؛ اعتماداً على مبرهنة "Cayley–Hamilton" وتمهيدية "Nakayama"؛ فضلاً عن المثاليات الابتدائية، ومفهوم الحلقة المحلية، لتكون أداة ووسيلة ربط بين هذه المفاهيم، بينما دراسات أخرى في توضيح هذا العلاقة تعتمد على المثاليات القابلة للقلب "Invertible Ideals" و رتبة حلقة؛ فضلاً عن بعض المفاهيم الأخرى في الجبر التبادلي.

نعرض بعض التعاريف والمبرهنات التي سيتم استخدامها في هذا البحث.

1-1. تعريف [1,2,3,4,5,7,15]:لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد(أو اختصاراً حلقة واحدية تبديلية)، ونرمز لمجموعة كل العناصر القابلة للقلب في R بالرمز $U(R)$. نقول إن الحلقةR:

1) منطقة تكاملية إذا و فقط إذا كانت R لاتحوي قواسماً للصفر "zero–divisor"

($0 \neq a \in R$ قاسم للصفر في R إذا وفقط إذا تحقق $[b \in R: ab = 0 \Longrightarrow b = 0]$)، ونرمز لها بالرمز ID .

2) منطقة مثاليات رئيسة إذا وفقط إذا كانت R منطقة تكاملية وكل مثالي I في R مثالي رئيساً في R، أي إنه من أجل أي مثالي I في R يوجد عنصر $r \in R$ يولد المثالي I في R و نعبر عن ذلك بالشكل $\Leftrightarrow_R\ x \in I =< r >$ $\exists a \in R: x = ra$ ويسمى I مثالياً رئيساً في R، ونرمز لمنطقة المثاليات الرئيسة بالرمز PID.

3) حلقة محلية إذا وفقط إذا وجِد مثالي أعظمي وحيد، مثل μ في R، ويُرمز للحلقة المحلية بالرمز (R, μ).

4) يُسمى العنصر $\alpha \in Quot(R)$ جبرياً على R إذا وفقط إذا وجِد حدودية واحدية"monic Polynomial" (أمثال الحد ذي الدرجة الأكبر يساوي الواحد) $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in R[x]$ تحقق $f(\alpha) = 0$ ،

حيث $K = \text{Quot}(R) = \{\frac{a}{b}: a, b \in R, b \neq 0\}$ حقل القسمة للحلقة R.

5) حلقة عادية أو ناظمية "Normal Ring" إذا وفقط إذا كانت R منطقة تكاملية ID و $R = \text{Int}_K(R)$، حيث $\mathbf{Int_K(R)} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{K}: \mathbf{R}$ عنصر جبري على $\mathbf{x}\}$ تسمى غُلاقة الحلقة R في K.

6) حلقة نوثرية "Noetherian Ring " إذا وفقط إذا كان كل مثالي في R منتهيَ التوليد في R (أو أي سلسلة متزايدة من المثاليات في R تنقطع).

7) إذا كان I مثالياً في الحلقة R، فإن جذر المثالي I يُعرف على أنه المثالي:

$$\sqrt{I} = \{r \in R: \exists n \in \mathbb{N}; r^n \in I\}$$

1−2.تعريف [1,2,6]: لتكن R حلقة تبديلية واحدية نعرف بعد "Krull" للحلقة R بالشكل التالي:

$$\dim R = \text{Sup}\{n: P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots\cdots \subsetneq P_n; P_i \in \text{Spec}(R), 1 \leq i \leq n\}$$

حيث $\mathrm{Spec(R)}$ مجموعة كل المثاليات الأولية في الحلقة R.

أمثلة على ذلك: إذا كانت R حقلاً فإن $\dim R = 0$، وفي حالة R هي PID وليست حقلاً، فإن $\dim R = 1$، و من أجل حلقة كثيرات الحدود $R = \mathbb{R}[x, y]$ المُعرفة على حقل الأعداد الحقيقية، فإن بُعدها $\dim R = 2$؛ وذلك لأن $\langle 0\rangle \subsetneq \langle x\rangle \subsetneq \langle x, y\rangle$.

1–3. تعريف **[2,6,15]**: لتكن R حلقة تبديلية واحدية، وليكن I و Q مثاليات في R عندئذ:

- نقول عن المثالي I إنه متلاشٍ (قابل للعدم) "nilpotent" إذا وجد $n \in \mathbb{N}$ يحقق $I^n = \{0\}$.
- نقول عن Q إنه مثالي ابتدائي في R إذا و فقط إذا تحققت إحدى الشروط الآتية:

$$1)\ Q \neq R, a.b \in Q \Rightarrow a \in Q \vee b \in \sqrt{Q}$$

$$2)\ Q \neq R, a.b \in Q \Rightarrow a \in Q \vee \exists n \geq 1: b^n \in Q$$

$$3)\ {}^{R}/_{Q} \neq \bar{0}, \bar{b} \in {}^{R}/_{Q}\ \text{zero} - \text{divisor} \Rightarrow \bar{b} \in N\left({}^{R}/_{Q}\right) = {}^{\sqrt{Q}}/_{Q}$$

- إذا كان Q مثالياً ابتدائياً في R، فإننا نرمز له بالرمز $P - \text{primay}$ حيث $P = \sqrt{Q}$.
- تسمى المجموعة المنتهية من المثاليات الابتدائية $\{Q_1, Q_2, \dots \dots, Q_r\}$ في R أنها تحليل ابتدائي مختزل "Irreducible Decomposition" للمثالي I إذا و فقط إذا تحققت الشروط الآتية:

$$I = \cap_{i=1}^{r} Q_i \quad \text{و} \quad i \neq j \ , \ \sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j} \quad \text{و} \quad \cap_{j \neq i} Q_j \not\subseteq Q_i$$

1−4. نتيجة **[2,6]:** إذا كان Q مثالي ابتدائي في حلقة واحدية تبديلية R، فإن $\mathrm{P} = \sqrt{\mathrm{Q}} \in \mathrm{Spec(R)}$ أصغر مثالي أولي يحوي Q.

1−5. مبرهنة **[2,6,8]:** إذا كانت R حلقة نوثرية، فإن الجذر الأساسي $N(R)$ متلاشٍ.

1−6. مبرهنة **[2,5,6,8]:** إذا كانت R حلقة نوثرية، فإن أي مثالي غير صفري في R يملك تحليلاً ابتدائياً مختزلاً.

2. **قضايا في المودولات منتهية التوليد:** نعرض فيما يأتي مبرهنة "Cayley−Hamilton" و تمهيدية "Nakayama" في المودولات (المقاسات) منتهية التوليد.

2−1. تعريف [2,3,6,11]: لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد و M هو $R - ule$ و N مودول جزئي في M، ونرمز لذلك $N \leq M$.

− إذا كان M هو $R - module$ و $N \leq M$ نعرف على زمرة القسمة $\left({M}/{N}, +\right)$ قانون التشكيل الخارجي:

$$\cdot : R \times {M}/{N} \to {M}/{N}$$
$$(r, \overline{m}) \mapsto \overline{r.m} = r.m + N$$

عندئذ يكون $\left({M}/{N}, +, .\right)$ هو $R - module$ حيث إن قانون التشكيل الداخلي $+$ هو نفسه المعرف على ${M}/{N}$.

- ليكن M هو $R - module$ و $J \subseteq M$ مجموعة جزئية غير خالية من M. نعرف المودول الجزئي في M والمولد بالمجموعة J على الشكل الآتي:

$$\langle \boldsymbol{J} \rangle = \bigcap_{\boldsymbol{J \subseteq N \leq M}} \boldsymbol{N} = \left\{ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{r_i}.\boldsymbol{n_i} : \ \boldsymbol{r_i} \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{n_i} \in \boldsymbol{J}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{N} \right\} \leq \boldsymbol{M}$$

- نقول عن المودول M إنه $R-module$ منتهيَ التوليد إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\exists\{m_1,\dots,m_n\}\subseteq M\ ;\ M=\langle m_1,\dots,m_n\rangle_R$$

- ليكن M,N هي $R-modules$، فنقول عن التطبيق $\varphi: M\to N$ إنه تطبيق خطي $(module-Homorphism)$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\begin{matrix}\forall m_1,m_2\in M\\ \forall r_1,r_2\in R\end{matrix}\ :\quad \varphi(r_1.m_1+r_2.m_2)=r_1.\varphi(m_1)+r_2.\varphi(m_2)$$

ونرمز لـ φ بـ $R-linear$ ونرمز لمجموعة كل التطبيقات الخطية $R-linear$ التي منطلقها M ومستقرها N بالرمز $Hom_R(M,N)$.

2-2. مبرهنة "Cayley–Hamilton"[2,3,6,11]: لتكن R حلقة واحدية تبديلية و M هو $R-module$ منتهيَ التوليد و I مثالي في R و $\varphi\in Hom_R(M,M)$. عندئذ:

إذا كان $\varphi(M)\subseteq I.M$ ، فإنه توجد حدودية

$$\psi_\varphi(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in R[x]$$

تحقق $\psi_\varphi(\varphi)=0$ و $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}, a_i\in I^i$.

نعرض تمهيدية "Nakayama" الأساسية و بعض نتائجها [2,3,11,12,13].

2-2. تمهيدية "Nakayama" الأساسية: ليكن M هو $R-module$ مودول منتهٍ التوليد و I مثالي في R يحقق $I\subseteq J(R)$، حيث $J(R)$ أساس جاكبسون (تقاطع كل المثاليات الأعظمية في R).

عندئذ: إذا كان $I.M=M$، فإن $M=\{0\}$ المودول الصفري .

2-3. نتيجة" $Nak(1)$": لتكن (R,μ) حلقة محلية، وليكن M هو $\mathrm{R}-\mathrm{module}$ منته التوليد. عندئذ: إذا كان $\mu.\mathrm{M}=\mathrm{M}$ فإن $\mathrm{M}=\{0\}$ المودول الصفري .

2-5. نتيجة" $Nak(2)$": لتكن (R,μ) حلقة محلية، و M هو $\mathrm{R}-\mathrm{module}$ منته التوليد غير صفري. إن $\{\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2,\ldots,\mathrm{m}_\mathrm{n}\}$ مجموعة أصغرية (بالنسبة لعدد العناصر) موِّلِدة للمودول M إذا وفقط إذا كانت $\{\overline{\mathrm{m}_1},\overline{\mathrm{m}_2},\ldots,\overline{\mathrm{m}_\mathrm{n}}\}$ تشكل قاعدة للفضاء الشعاعي $\mathrm{M}/_{\mu.\mathrm{M}}$ المعرف على الحقل $\mathrm{R}/_{\mu}$ حيث

$$\forall\ \mathbf{i}\in\{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ldots..,\ \mathbf{n}\}\ :\quad \overline{\mathrm{m}_\mathrm{i}}=\mathrm{m}_\mathbf{i}+\mu.\mathrm{M}.$$

نقدم فكرة عامة عن التموضع في الحالة العامة ومن ثم عند المثالي الأولي، و ذلك من خلال التعريف التالي [1,2,8,10,15] .

تعريف: لتكن R حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

- نقول عن المجموعة $\emptyset\neq \mathrm{S}\subseteq \mathrm{R}$ إنها مغلقة ضربياً إذا وفقط إذا تحقق:

$$1\in \mathrm{S} \quad \text{و} \quad \forall \mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2\in \mathrm{S}:\mathrm{s}_1.\mathrm{s}_2\in \mathrm{S}$$

- لتكن S مجموعة مغلقة ضربياً في R ولنعرف علاقة تكافؤ $\sim$ على الجداء الديكارتي $(\mathrm{R}\times \mathrm{S})$ بالشكل:

$$\forall(\mathrm{r},\mathrm{s}),(\mathrm{r}`,\mathrm{s}`)\in \mathrm{R}\times \mathrm{S}:(\mathrm{r},\mathrm{s})\sim(\mathrm{r}`,\mathrm{s}`)\Leftrightarrow \exists \mathrm{u}\in \mathrm{S}:\mathrm{u}(\mathrm{rs}`-\mathrm{sr}`)=0$$

نرمز لصفوف التكافؤ بالرمز $\left[\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}\right]=\{(\mathrm{r}`,\mathrm{s}`)\in \mathrm{R}\times \mathrm{S}:(\mathrm{r},\mathrm{s})\sim(\mathrm{r}`,\mathrm{s}`)\}$ واختصاراً بالرمز $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$.

ونرمز لمجموعة كل صفوف التكافؤ بالرمز $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}$ أي إن:

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{R}=\frac{\mathrm{R}\times \mathrm{S}}{\sim}$$

نُعرف على مجموعة صفوف التكافؤ $S^{-1}R$ قانوني تشكيل داخليين:

$$\forall (r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S:$$

$$\left[\frac{r_1}{s_1}\right].\left[\frac{r_2}{s_2}\right] = \left[\frac{r_1.r_2}{s_1.s_2}\right] \text{ و } \left[\frac{r_1}{s_1}\right] + \left[\frac{r_2}{s_2}\right] = \left[\frac{r_1.s_2 + r_2.s_1}{s_1.s_2}\right]$$

عندئذ تكون $(S^{-1}R, +, .)$ حلقة تبديلية واحدية، الحيادي فيها هو: $\frac{1}{1} = 1$.

(في حالة $0 \in S$ نحصل على التموضع التافه $S^{-1}R = \{0\}$)

و في حالة $S = R\backslash P$ حيث $P \in \mathrm{Spec}(R)$ مثالي أولي في R، فإن الحلقة $S^{-1}R = \left\{\frac{a}{b} : a \in R, b \notin P\right\}$ تُسمى حلقة التموضع لـ R عند المثالي الأولي P، و يُرمز لها بالرمز R_P، مثال على ذلك، من أجل $R = \mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة و $P =< 5 >$ مثالي أولي في R و $S = R\backslash P$ تكون حلقة التموضع لـ $\mathbb{Z}$ عند المثالي الأولي $P =< 5 >$ بالشكل:

$$\mathbb{Z}_{\langle 5 \rangle} \coloneqq S^{-1}R = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in R, b \notin < 5 >\right\} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in R, 5 \nmid b\right\}.$$

3. حلقات التقييم و حلقات التقييم المنفصل "Valuation Ring and Discrete Valuation Ring":

3-1.تعريف [1,6,9,14,15]: لتكن $(G, +)$ زمرة تبديلية و $\leq$ علاقة ترتيب كلي على G، و K حقل ما.

a. إن النظام الرياضي $(G, +, \leq)$ يُسمى زمرة مرتبة كلياً إذا وفقط إذا تحقق:

$$g, \grave{g} \in G: g \leq \grave{g} \implies g + h \leq \grave{g} + h \ ; \ \forall h \in G$$

b. إذا كانت $(G, +, \leq)$ زمرة مرتبة كلياً، فإن تقييم الحقل K في الزمرة G يُعرف على أنه التشاكل $v: (K^*, .) \to (G, +)$ و الذي يحقق: أياً كان $a, b \in K^*$، فإن:

و شـــــــرط التشـــــــاكل الزمـــــــري $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ ، $v(a.b) = v(a) + v(b)$ ويسمى v تطبيقاً تقييمياً.

و في حالة $G = \mathbb{Z}$ زمرة الأعداد الصحيحة، فيسمى v تطبيقاً تقييمياً منفصلاً أو متقطعاً، ويُرمز له بالرمز DV .

c. إذا كانت R منطقة تكاملية ID، فإن R تسمى حلقة تقييم "Valuation Ring" إذا وفقط إذا تحقق:

$$a \in \mathrm{Quot}(R): a \in R \text{ or } \frac{1}{a} \in R$$

حيث $\mathrm{Quot}(R) = \{\frac{x}{y} : x, y \in R, y \neq 0\}$ حقل القسمة للمنطقة التكاملية R، ويُرمز لحلقة التقييم بالرمز VR .

d. إذا كانت R حلقة تقييم، فإن R تُسمى حلقة تقييم متقطعة أو منفصل إذا وفقط إذا كانت R حلقة نوثرية، وليست حقلاً، و يُرمز لها بالرمز DVR.

ملاحظة: يمكن صياغة التعريف السابق من أجل الزمر الضربية$(G, .)$.

3−2. نتيجة[1] : إذا كانت R منطقة تكاملية، و$K = \mathrm{Quot}(R)$ حقل القسمة و v تطبيقاً تقييمياً، فإن المجموعة $R_v = \{a \in K^* : v(a) \geq 0\} \cup \{0\}$ تُشكل حلقة جزئية من K و حلقة تقييم.

يسمى التطبيقv في النتيجة (3−2) تطبيق تقييم من أجل الحلقة R.

3−3. مبرهنة[1]: لتكن R منطقة تكاملية ID. إن R حلقة تقييم VR إذا و فقط إذا وجِدَ تطبيق تقييم v يكون من أجله $R = R_v$ حلقة تقييم.

3−4. **تمهيدية** [1,15]: لتكن R منطقة تكاملية ID ، و $K = Quot(R)$ و $(G, +, \geq)$ زمرة مرتبة جيداً. إذا كان $v: R^* \longrightarrow G$ تطبيقاً يحقق: أياً كان $a, b \in R^*$

$v(ab) = v(a) + v(b)$ و $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$، فـــإن التطبيق $\grave{v}: K^* \longrightarrow G$ المعرف بالعلاقة $\forall \frac{a}{b} \in K^* : \grave{v}\left(\frac{a}{b}\right) = v(a) - v(b)$، تطبيق تقييم للحقل K.

يُسمى التطبيق v في التمهيدية السابقة (3–4) تطبيقاً تقييمياً للحلقة R.

3–5. مبرهنة[1][1]: لتكن R حلقة تحليل وحيد، و $t() = R$ و $p \in R$ عنصراً أولياً في R و $R_{<p>}$ حلقة التموضع للحلقة R عند المثالي $P =< p >$. عندئذٍ يوجد تطبيق تقيم متقطع v من أجله يكون $R_v = R_{<p>}$ حلقة تقييم.

الإثبات: بما أن R منطقة تحليل وحيد (كل عنصر غير صفري وغير قابل للقلب يُكتب كجداء منتهٍ لعناصر أولية في R)، ومنه يمكن أن نُعرف التطبيق $v_p: R^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ بالعلاقة:

$$\forall\ a \in R^*: v_p(a) = n_a \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z} : a \text{ يقسم } p^n\}$$

أياً كان $a, b \in R^*$ فإنه يوجد $c, d \in R$ حيث يكون $a = cp^{n_a}, b = dp^{n_b}$ و دون المساس بالعمومية نفرض أن $n_a \geq n_b$.

- $v_p(ab) = v_p(cdp^{n_a+n_b}) = n_a + n_b$
- $v_p(a + b) = v_p\big((cp^{n_a-n_b} + d)p^{n_b}\big) \geq n_b = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$

و حسب التمهيدية السابقة (2–4) يكون التطبيق $v: K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ المعرف بالعلاقة:

$$\forall \frac{a}{b} \in K^* :\ v\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$$

[1] يمكن الاستفادة من أن كل منطقة مثاليات رئيسية هي منطقة تحليل وحيد كما في [1]تماما.

تطبيق تقييم (متقطع) للحقل K حيث $K = Quot(R)$. و تكون حلقة تقييم هذا التطبيق:

$$
\begin{aligned}
R_v &= \left\{\frac{a}{b} \in K^* :\ v\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{a}{b} \in K^* :\ v_p(a) - v_p(b) \geq 0\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{a}{b} \in K^* : n_a \geq n_b\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{cp^{n_a}}{dp^{n_b}} \in K^* :\ n_a \geq n_b\right\} \cup \{0\} \\
&= \left\{\frac{cp^{n_a - n_b}}{d} : c, d \in R, d \text{ لا يقسم } p\right\} \\
&= \left\{\frac{s}{t} : s, t \in R, t \text{ لا يقسم } p\right\} \\
&= \left\{\frac{s}{t} : s, t \in R, t \notin < p >\right\} = R_{<p>} = R_P.
\end{aligned}
$$

و حسب المبرهنة (3 −3) تكون حلقة التموضع R_P للحلقة R عند المثالي P حلقة تقييم VR، و بذلك يتم المطلوب.

يمكن أن نستنتج مباشرةً بأنه إذا كانت R حلقة نوثرية، وليست حقلاً في المبرهنة السابقة، فإن حلقة التموضع R_P للحلقة R عند المثالي P حلقة تقييم متقطع. مثال على ذلك:

إذا كانت $R = \mathbb{Z}$ حلقة الأعداد الصحيحة و $K = Quot(R) = \mathbb{Q}$ حقل الأعداد العادية، من أجل المثالي الأولي $P =< 3 >$ المولد بالعدد الأولي $p = 3$، فتكون حلقة التموضع

$R_P = \mathbb{Z}_{<3>} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\, , b \notin < 3 >\right\} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\, , b \text{ لا يقسم } 3\right\}$ للحلقة R عند المثالي $P =< 3 >$ حلقة تقييم متقطع.

4. الحلقات العاديـة "Normal Rings" و حلقات التقييم " Valuation Rings":

تبيّن من خلال المبرهنة التالية أن كل حلقة تقييم هي حلقة ناظمية.

4−1.مبرهنـة [9,15]: إذا كانـت R حلقـة تقيـيم، فـإن $R = Int_K(R)$، حيـث $K = Quot(R)$ أي إن R حلقة ناظمية.

إن عكس المبرهنة السابقة (4−1) ليس صحيحاً في الحالـة العامـة، أي إنـه ليس بالضـرورة أن تكـون الحلقـة الناظميـة حلقـة تقيـيم، مثـال علـى ذلـك $R = \mathbb{Z}$ حلقـة الأعـداد الصـحيحة هـي حلقـة ناظميـة، ولكنهـا ليسـت حلقـة تقيـيم، و ذلـك لأن $Int_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q} = Qout(\mathbb{Z})$ $a = \frac{3}{7} \in$ و لكن $a \notin R$، $\frac{1}{a} = \frac{7}{3} \notin R$.

من خـلال استخدام مبرهنـة "Cayley–Hamilton" وتمهيديـة"Nakayama" و إضافة بعض الشوط سنبيّن في المبرهنة التالية (4−3) أن كل حلقة عادية هي حلقة تقييم، و لكن قبل ذلك نعرض تمهيدية تبيّن إحدى خواص المثاليات الابتدائية التي سنحتاج إلى استخدامها في المبرهنة (4−3).

4−2. تمهيديـة[2]:لتكن R حلقـة نوثريـة و Q مثـالي فـي R، ولايساويها.إذا كـان Q هــو P − primary فإنـــه يوجـــد عـــدد صـــحيح موجـــب $n \geq 1$ يحقـــق:

$$P^n \subseteq Q \subsetneq P^{n-1}$$

الإثبـات: إنR نوثريـة، وعليـه يكـون R/Q حلقـة نوثريـة أيضـاً، وحسـب المبرهنـة (5−1) يكون الجذر الأساسي $N(R)$ قابلاً للعدم، أي إن:

$$\exists n \geq 1; \left(N\left(R/Q\right)\right)^n = \langle 0 \rangle$$

[2]الإثبات بسيط و لكن تم عرضه كي يكون واضحاً.

وبما أن Q مثالي ابتدائي عندئذ $N\left(R/_{Q}\right)=\sqrt{Q}/_{Q}$؛ وبالتالي:

$$\exists n\geq 1;\left(\sqrt{Q}/_{Q}\right)^{n}=\langle 0\rangle$$

وعليه يوجد مثالي أولي $P=\sqrt{Q}$ يحقق: $P^{n}\subseteq Q\subsetneq P^{n-1}$ من أجل $n\geq 1$.

4-3.مبرهنة: لتكن (R,μ) حلقة محلية ونوثرية ومنطقة تكاملية بُعدها $\dim(R)=1$. إن القضايا التالية متكافئة:

1) R حلقة عادية "Normal Ring" .
2) μ مثالي رئيس في R .
3) من أجل أي مثالي I في R مغاير للمثالي الصفري يوجد عدد صحيح $n\geq 1$ يحقق : $I=\mu^{n}$.
4) من أجل أي مثالي I في R مغاير للمثالي الصفري يوجد عدد صحيح $n\geq 1$ و $t\in R$ يحققان : $I=<t^{n}>$.
5) R حلقة تقييم منفصل.

الإثبات:

$(2\Leftarrow 1)$: بما أن $\dim(R)=1$، فإنه يوجد $0\neq a\in\mu$، ومنه $I=<a>\subseteq R$ و نعلم أن جذر المثالي يساوي تقاطع كل المثاليات الأولية التي تحويه أي $\sqrt{I}=\bigcap_{I\subseteq P\in Spec(R)}P$ حيث $Spec(R)$ مجموعة كل المثاليات الأولية في R. و كون $\dim(R)=1$ و كل مثالي أعظمي في حلقة تبديلية واحدية هو مثالي أولي والمثالي الصفري يمثل مثالياً أولياً في R (لأن منطقة تكاملية)، فنجد

$\mu = \sqrt{I}$ مثالياً أعظمياً، ويكون I مثالياً $\mu - primary$ ابتدائياً. و حسب التمهيدية السابقة $(2-4)$ يوجد عدد صحيح موجب $n \in \mathbb{N}$ يحقق $\mu^n \subseteq I =<$ $\mu \subseteq \mu^{n-1} \subsetneq a>$، ومنه يوجد عنصر مثل $b \in \mu^{n-1}$ و $b \notin I =< a >$.

سنبيّن فيما يلي أن $\mu =< t >_R$ مولّد بعنصر $t = \frac{a}{b} \in Quot(R)$ في الحلقة R، و هذا ممكن؛ لأن:

$$b.\mu^n \subseteq \mu^n \subseteq I =< a >\subsetneq \mu \Rightarrow \frac{1}{t}.\mu = \frac{b}{a}.\mu \subseteq R \Rightarrow \mu \subseteq t.R =< t >_R$$

سنبرهن أن المثالي $\frac{1}{t}\mu$ يساوي كامل الحلقة R ، ومن أجل ذلك نفرض جدلاً أن $\frac{1}{t}\mu \subseteq \mu$، ومنه يمكن أن نُعرّف التشاكل $\varphi: R \longrightarrow R$ بالعلاقة $\forall c \in R: \varphi(c) = \frac{1}{t}c$ و نلاحظ أن $\varphi(R) \subseteq \frac{1}{t}\mu.R$ ؛ فضلاً عن أن كل حلقة واحدية هي مودول منتهي التوليد على نفسها؛ وبالتالي يكون حسب مبرهنة "Cayley–Hamilton" يوجد حدودية $\psi_\varphi(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in R[x]$ تحقق $\psi_\varphi(\varphi) = 0$ و منه $\psi_\varphi(\varphi)(1) = \psi_\varphi\left(\frac{1}{t}\right) = 0$ و هذا يؤدي إلى أن العنصر $\frac{1}{t} \in Quot(R)$ عنصر جبري على R؛ ولأن R ناظمية يكون $\frac{1}{t} \in R$ ، ومنه $b = \frac{1}{t}a \in< a >= I$ و هذا يناقض كون $b \notin I =< a >$ ،

و بالتالي الفرض الجدلي خاطئ، وبما أن (R, μ) حلقة محلية؛ أي إن μ المثالي الأعظمي الوحيد في R، وهذا يؤدي إلى أن $\frac{1}{t}\mu = R$، ومنه نجد $\mu =< t >_R$.

$2) \Leftarrow 3)$: بشكل مماثل لِما سبق، بما أن $\dim(R) = 1$، فإنه يوجد $0 \neq a \in \mu$ و منه $I =< a >\subseteq R$ و نعلم أن جذر المثالي يساوي تقاطع كل المثاليات الأولية التي تحويه؛ أي $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P \in Spec(R)} P$ حيث $Spec(R)$ مجموعة كل المثاليات الأولية في R. و كون $\dim(R) = 1$، وكل مثالي أعظمي

في حلقة تبديلية واحدية هو مثالي أولي، والمثالي الصفري يمثل مثالياً أولياً في R، فنجد $\sqrt{I}=\mu$ مثالياً أعظمياً، ويكون I مثالياً $\mu-primary$ ابتدائياً. وحسب التمهيدية السابقة $(2-4)$ يوجد عدد صحيح موجب $n\in\mathbb{N}$ يحقق $<a> = I \subseteq \mu^{n}$ $\subseteq \mu^{n-1} \subsetneq <a>$ μ.

و حسب (2) يكون μ مثالياً رئيساً، وحسب نتيجة "$Nak(2)$" نجد $\dim_{\frac{R}{\mu}}\left(\frac{\mu^{n-1}}{\mu^{n}}\right)=1$ حيث $\frac{\mu^{n-1}}{\mu^{n}}$ فضاء شعاعي معرف على الحقل $\frac{R}{\mu}$، ومنه:

$$1=\dim_{\frac{R}{\mu}}\left(\frac{\mu^{n-1}}{\mu^{n}}\right)\gneqq\dim_{\frac{R}{\mu}}\left(\frac{I}{\mu^{n}}\right)\Longrightarrow\dim_{\frac{R}{\mu}}\left(\frac{I}{\mu^{n}}\right)=0\Longrightarrow I=\mu^{n}.$$

3)$\Longleftarrow$ 4) : يوجد عنصر $t\epsilon\mu\setminus\mu^{2}$، وذلك لأنه في حالة $\mu=\mu^{2}$ سيكون $\mu=\{0\}$ و ذلك حسب نتيجة"$Nak(1)$" (وذلك كون μ مودولاً منتهي التوليد على R، و(R,μ) حلقة محلية؛ أي إن $J(R)=\mu$) و هذا غير ممكن؛ لأن $\dim(R)=1$. حسب الفرض (3) يوجد $n\in\mathbb{N}$ يحقق $<t>=\mu^{n}$، و بما أن $t\notin\mu^{2}$ يكون $n=1$؛ أي إن $\mu=<t>$؛ وبالتالي حسب الفرض (3) من أجل أي مثالي I في R مغاير للمثالي الصفري يوجد عدد صحيح $n\geq 0$ يحقق $I=\mu^{n}$: وكون $\mu=<t>$ نجد $I=\mu^{n}=<t^{n}>$ و بذلك يتم المطلوب .

4)$\Longleftarrow$5) :ليكن I مثالياً في R، إذا كان $I=\{0\}$، فإنه مثالي رئيس، وفي حالة I مثالي في R مغاير للمثالي الصفري، فإنه يوجد عدد صحيح $n\geq 0$ و $t\in R$ يحققان : $I=<t^{n}>$، وذلك حسب الفرض (4)؛ أي إن R منطقة مثاليات رئيسة. إن كل مثالي أعظمي في الحلقة التبديلية الواحدية هو مثالي أولي، وكون R منطقة مثاليات رئيسة، فإنه يوجد $p\in R$ عنصر أولي يحقق $\mu=<p>$، وكل منطقة مثاليات رئيسة هي منطقة تحليل وحيد، ومنه يكون حسب التمهيدية $(5-3)$ $R=R_{<p>}$ حلقة تقييم من أجل تطبيق تقييم (متقطع) v، و لكن (R,μ) حلقة محلية؛ أي إن $R=R_{<p>}=R_{v}$ حلقة تقييم، وحسب الفرض R

نوثرية، وليست حقلاً (لأن $\dim(R) = 1$). ومما سبق R حلقة تقييم ونوثرية، وليست حقلاً، ومنه تكون R حلقة تقييم متقطع.

$5) \Longleftarrow 1)$: صحيحة، وذلك حسب المبرهنة (4−1).

إن من الخواص المهمة للمثاليات في مناطق ديدكند "Dedekind's Domain" [8,9,15]هي أنه أي مثالي مغاير للصفر يُكتب كجداء منتهٍ، وبشكل وحيد لمثاليات فيها، وهذا ما سنثبته أيضاً في الحلقات الناظمية وبشكل أكثر خصوصية كقوة لمثالي أعظمي من خلال عرض النتيجة التالية، وبالاستفادة من المبرهنة السابقة (4−3).

4−4.نتيجة: لتكن (R,μ) حلقة محلية ونوثرية ومنطقة تكاملية بُعدها $\dim(R) = 1$. إذا كانت R حلقة عادية، فإن أي مثالي Iفي R مغاير للمثالي الصفري ولا يساوي كامل الحلقة، يُكتب كقوة للمثالي الأعظمي فيR، أي إنه يوجد عدد صحيح موجب n يحقق: $I = \mu^n$

الإثبات: بما أن R نوثرية، فإن I يملك تحليلاً ابتدائياً مختزلاً في R، وذلك حسب المبرهنة (1−6)؛ أي إنه يوجد مجموعة منتهية من المثاليات الابتدائية $\{Q_1, Q_2, \dots\dots, Q_r\}$ في R، والتي تحقق الشروط الآتية: $I = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$ و $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}\ ,\ i \neq j$ و $\bigcap_{j\neq i} \mathrm{Q_j} \nsubseteq \mathrm{Q_i}$.

و حسب المبرهنة السابقة (4−3)، فإنه يوجد عدد صحيح موجب n_i يحقق $Q_i = \mu^{n_i}$ ، حيث $i \in \{1,2,\dots\dots,r\}$، ومنه:

$I = \bigcap_{i=1}^{r} \mu^{n_i} = \mu^{n_1} \cap \mu^{n_2} \cap \dots\dots \cap \mu^{n_r}$.

نضع $n = \max\{n_1, n_2, \dots\dots, n_r\}$،، فيكون $\mu^n \subseteq \mu^{n_i}$ و ذلك أياً كان $i \in \{1, 2, \dots\ \dots\ ,\ r\}$، وعليه يوجد عدد صحيح موجب nيحقق $I = \mu^n$، وبذلك يتم المطلوب.

المراجع العلمية:

1. شوقي الراشد: دراسة العلاقة بين حلقات التقييم المتقطع والتموضع عند مثالي أولي ومنطقة المثاليات الرئيسية، مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية، 2017.

REFERENCES:

2. Atiyah, M. F, Introduction to commutative Algebra. Universitry of Oxford. 1967.
3. A. Azizi, On Generalization of Nakayama's Lemma, Glasg. Math. J. 52: 605-617 (2010).
4. Braun, A., andWareld, R.B., Symmetry and Localization in Noetherian Prime PI Rings, Journal of Algebra 118, 322-335 (1988).
5. Bruns, W. and Herzog, J. Cohen-Macaulay, Rings, 2nd ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1998.
6. Eisenbud, D., Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry. Spriger-Verlay, 2008 .
7. Eisenbud, D., Expository Papers Dedicated to David Eisenbud on the Occasion of His 65th Birthday, 2013, ISBN 978-1-4614-5292-8.
8. Fraleigh, J., A First course in Abstract Algebra. 7Edition. Spriger-Verlay. 2004.
9. Max D. Larsen , Paul J. McCarthy: Multiplicative theory of ideals, Academic Press New york and London 1971.
10. MÄuller, B. J., Localization in Fully Bounded Noetherian Rings, Pacic Journal of Mathematics 67, 233-245 (1976).
11. P. Balister, S. Howson. Note on Nakayama's lemma for compact-Modules, Asian J. Math. 1: 224-229 (1997).
12. R. Ameri, Two Versions of Nakayama Lemma for Multiplication Modules, Int. J. Math. Math. Sci., 54: 2911-2913 (2004).

13. T. Nakayama, A remark on finitely generated modules, Nagoya Math. J. 3: 139-140 (1951).
14. Swanson,I., and Huneke, C.,Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules, London Mathematical Society Lecture Note Series 336, Cambridge University Press.
15. Zariski, O., Samuel, P. Commutative Algebra Volume II.SpringerVerlag, New York, 1960.