دراسة قابلية حل المعادلتين

$aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = \pm 1$ وَ $X^2 - \Delta Y^2 = -3$

د. حسن سنكري*

الملخص

درسنا في هذا العمل المعادلتين $aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = \pm 1(I)$ وَ $X^2 - \Delta Y^2 = -3(II)$ وقد برهنا أنّه إذا كانت المعادلة (II) غير قابلة للحل فإنّ المعادلة (I) تكون غير قابلة للحل، كذلك برهنّا شرطاً لازماً وكافياً لكي تكون المعادلة (I) قابلة للحل عندما تكون المعادلة (II) قابلة للحل، وأيضاً برهنّا شرطاً لازماً وكافياً كي تكون المعادلة (II) قابلة للحل عندما تكون المعادلة (I) قابلة للحل. فضلاً عن ذلك برهنّا أنّه إذا كان Δ عدداً أولياً فإن المعادلة(I) تكون قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت المعادلة (II) قابلة للحل.

الكلمات المفتاحية: معادلة بِل، الحقول التربيعيّة، مرافق عدد تربيعي.

التصنيف الرياضي العالمي 2010: 11E15,11E18,11E25.

* أستاذ مساعد في قسم الرياضيات –كلية العلوم –جامعة تشرين –اللاذقية –سورية.

Studying of the solvability of the equations $aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = \pm 1$ وَ $X^2 - \Delta Y^2 = -3$

Dr. Hasan Sankari [*]

Abstract

The aim of this article is studying the equations $aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = \pm 1$ $(I)$and$X^2 - \Delta Y^2 = -3(II)$, we proved that if equation (II) is unsolvable then the equation (I) is unsolvable, also we proved necessary and sufficient condition such that the equation $(I)$is solvable when the equation (II) is solvable, and we proved necessary and sufficient condition such that the equation $(II)$is solvable when the equation (I) is solvable. We proved that if Δ is prime number then the equation $(I)$is solvable iff the equation (II) is solvable.

Key words: Pell equation, Quadratic Fields, conjugate of quadratic number. 2010 M.S.C: 11E15, 11E18, 11E25.

[*] Associate Professor, Department of mathematics, Tishreen University. Lattakia ,Syria

مقدّمه:

تُعَدُّ المعادلات الديوفنتية من المواضيع المهمّة في الرياضيات، لذلك انصبّ اهتمام كثير من الباحثين على دراستها منذ مئات السنين، وحتّى يومنا هذا.

إنَّ الكثير من المعادلات الديوفنتية لم تُحلّ حتى الآن، وهناك العديد من ذوي الاختصاص والمهتمين في هذا المجال، على سبيل المثال المعادلة $X^2 - \Delta Y^2 = 1$ حيث Δ عدد صحيح، والتي تُسمّى معادلة بِل، درسها في القرن السابع عشر كل من (برونكر W.Brouncker، والس J.Wallis، أولر Euler، غاوس Gauss، ......) وفي القرن الثامن عشر استخدم لاغرانج الكسر المستمر لحل المعادلة $X^2 - \Delta Y^2 = 1$ وليعطي البرهان الأول الكامل بأنّها دوماً قابلة للحل في مجموعة الأعداد الصحيحة.

عمَّم الرياضيون معادلة بِل إلى المعادلة $X^2 - \Delta Y^2 = N$ وسُمّيت معادلة بِل المُعمَّمة، حيث Nعدد صحيح.

حديثاً في أواخر القرن الماضي درس بعض الرياضيين معادلة بِل المعممة من أجل قيم محددة لِـ N وقيم محددة لـِ Δ، على سبيل المثال في [2] درس P.Kaplan قابليّة حل المعادلتين:

$$\boldsymbol{X^2 - \Delta Y^2 = -4} \text{ وَ } \boldsymbol{X^2 - \Delta Y^2 = -1}$$

معاً في آنٍ واحد.

في [5] أعطى R.A.Molin معياراً لقابلية حل المعادلتين:

$$\boldsymbol{X^2 - \Delta Y^2 = N} \text{ وَ } \boldsymbol{X^2 - \Delta Y^2 = -N}$$

في آنٍ واحد. وفي [6] عمّم Molin دراسة قابلية حل المعادلتين السابقتين إلى دراسة قابلية حل المعادلتين $X^2 - \Delta Y^2 = m_1$ وَ $X^2 - \Delta Y^2 = m_2$ معاً في آنٍ واحد، حيث m_1, m_2 أعداد صحيحة.

في [1] درس K.S.Williams وَ K.Hardy المعادلة $dv^2 - 2evw - dw^2 = 1$ وفي [4] درس P.Zarzycki المعادلة $X^2 - kXY + Y^2 + X = 0$ وأيضاً في[8] درس Refik Kekin وَ Zafersir قابلية حل المعادلة $X^2 - kXY + Y^2 + 2^n = 0$.

في هذه المقالة ندرس قابلية حل المعادلتين:

$$aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = \pm 1 \quad (I)$$
$$X^2 - \Delta Y^2 = -3 \quad (II)$$

معاً في آنٍ واحد، في مجموعة الأعداد الصحيحة.

أهمّية البحث وأهدافه:

يهدف البحث إلى دراسة قابلية حل المعادلتين:

$$aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = \pm 1 \quad (I)$$
$$X^2 - \Delta Y^2 = -3 \quad (II)$$

حيث Δ عدد صحيح حرّ من التربيع (أي إنّ قواسمه الأولية مختلفة مثنى مثنى)، وتكمن أهميته في أنّه يقدم شرطاً لازماً وكافياً لقابلية حل المعادلتين معاً في آنٍ واحد. كما يبيّن أيضاً أنّه إذا كانت أحدى المعادلتين غير قابلة للحل فإنّ الأُخرى تكون غير قابلة للحل أيضاً.

مواد البحث وطرائقه:

درسنا في هذا البحث قابلية حل المعادلتين (I)و(II) معاً في آنٍ واحد في مجموعة الأعداد الصحيحة، واعتمدنا في هذه الدراسة على تعاريف ومبرهنات ونتائج متعلقة بدراسة بعض أنواع المعادلات الديوفنتية التربيعية نعرضها في الآتي:

تعريف 1:[11,10,3]

ليكن Δ عدداً صحيحاً حرّاً من التربيع، يُعرّف الحقل التربيعي $K = Q(\sqrt{\Delta})$ (حيث Q حقل الأعداد الكسرية) بأنّه المجموعة:

$$K = Q(\sqrt{\Delta}) = \{r + s\sqrt{\Delta}; r, s \in Q\}$$

وتُعرّف حلقة الأعداد الجبرية الصحيحة O_K في هذا الحقل بأنّها المجموعة:

$$O_K = Z[\sqrt{\Delta}] = \{a + b\sqrt{\Delta}; a, b \in Z\}$$

إذا كان $\Delta \not\equiv 1(mod4)$، وبأنّها المجموعة:

$$O_K = Z\left[\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}\right] = \left\{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{\Delta}; a, b \in Z; a \equiv b(mod2)\right\}$$

$$= \left\{a + b\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}; a, b \in Z\right\}$$

وذلك عندما $\Delta \equiv 1(mod4)$.

والجدير بالذكر أنّ $Z[\sqrt{\Delta}]$ حلقة جزئية من الحلقة O_K عندما $\Delta \equiv 1(mod4)$ أي إنّ:

$$Z\left[\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}\right] \supseteq Z[\sqrt{\Delta}].$$

تعريف 2:

إذا كان $K \ni \alpha = r + s\sqrt{\Delta}$ فإنّ مرافق α يُرمز له بالرمز $\acute{\alpha}$ ويُعرّف بالشكل:

$$\boldsymbol{\acute{\alpha} = r - s\sqrt{\Delta}}$$

تعريف 3:

إذا كـان $K \ni \alpha = r + s\sqrt{\Delta}$ فـإنّ نظـيم العنصـر α نرمـز لـه بـالرمز $N(\alpha)$، ويُعرّف بأنّه المقدار:

$$N(\alpha) = \alpha.\acute{\alpha} = (r + s\sqrt{\Delta})(r - s\sqrt{\Delta}) = r^2 - \Delta s^2$$

إذا كـــــان $Q(\sqrt{\Delta}) \ni \alpha_1 = r_1 + s_1\sqrt{\Delta}, \alpha_2 = r_2 + s_2\sqrt{\Delta}$ وَ $a \in Q$ فإنّه يمكن البرهان أنّ:

1. $N(\alpha_1\alpha_2) = N(\alpha_1)N(\alpha_2)$
2. $N\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \frac{N(\alpha_1)}{N(\alpha_2)}$
3. $N(\alpha) = N(\acute{\alpha})$
4. $N(a) = a^2$

ملاحظة 1:

عنـدما نقـول إنّ المعادلـة $\alpha^2 - \Delta Y^2 = N$ قابلـة للحـل، فهـذا يعنـي أنّـه يوجـد $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ ينتمـي إلـى $Z(\sqrt{\Delta})$ حيـث $N(\alpha) = N(x + y\sqrt{\Delta}) = N$؛ وبالتـالي يمكن القول إنّ $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ بدلاً من القول إنّ (x, y) حلٌّ لها.

تعريف 4:

يُسمّى العدد $\alpha \in O_K$ عنصر الوحدة في O_K إذا كان $N(\alpha) = \pm 1$.

إذا كـان $\Delta \not\equiv 1(mod4)$ وكـان $\alpha = x + y\sqrt{\Delta}$ عنصـر الوحـدة فـي $O_K = Z[\sqrt{\Delta}]$ فإنّ $x^2 - \Delta y^2 = \pm 1$، أي أنّه لإيجاد عنصر الوحدة في $O_K = Z[\sqrt{\Delta}]$ فإننا نقوم بحل المعادلة $X^2 - \Delta Y^2 = \pm 1$.

إذا كـــان $\Delta \equiv 1(mod4)$ وكـــان $\alpha = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{\Delta}$ عنصـــر الوحـــدة فـــي $O_K = Z\left[\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}\right]$ فإنّ:

$X^2 - \Delta y^2 = \pm 4$ أي إنّه لإيجاد عناصر الوحدة في $O_K = Z\left[\frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}\right]$ فإننا نقوم بحل المعادلة $X^2 - \Delta Y^2 = \pm 4$. وبالتالي $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \Delta\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \pm 1$،

إذا كان $\Delta < 0$ فإنّه يوجد عدد منتهٍ من عناصر الوحدة في O_K وبشكل خاص فإنّ عناصر الوحدة في $Z[\sqrt{-3}]$ هي $\{\pm 1\}$ حيث: $Z[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3}; a, b \in Z\}$.

تعريف 5:

يُسمّى العدد $\alpha \in O_K$ غير خزول إذا كانت قواسمه عناصر واحدة أو من الشكل $\varepsilon\alpha$ حيث ε عنصر الوحدة. ويُسمّى $\alpha \in O_K$ حيث $\alpha \neq 0$ وَ α ليس عنصر الوحدة (عدد أوّلي)، إذا كان $\alpha|\beta\gamma$ فإنّ $\alpha|\beta$ أو $\alpha|\gamma$.

والجدير بالذكر أنّ $\alpha \in O_K$ يكون عدداً أوّليّاً في O_K إذا كان $N(\alpha) = p$ حيث p عدد أوّلي في حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

تعريف 6:

الحلقة O_K تُسمّى ساحة تحليل وحيد إذا كان كل عنصر $\alpha \in O_K$ يكتب بشكل وحيد كجداء منتهٍ لعناصر غير خزولة.

تمهيدية 1:[11]

المعادلة $X^2 + \Delta Y^2 = N$ قابلة للحل إذا وفقط إذا كان:

$$N = 2^{\alpha} 3^{\beta} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} . q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}$$

حيث α_i, β_j أعداد صحيحة موجبة، $0 \le \alpha < 1, 0 \le \beta < 1$، p_i أعداد أولية فردية من الشكل $6k + 1$، وَ q_i أعداد أولية فردية من الشكل $5k + 5$.

تمهيدية 2:[7]

إذا كانت O_K ساحة تحليل وحيد، وكان $\alpha, \beta \in O_K$ حيث $\alpha\beta = \gamma^2$ وَ $(\alpha, \beta) = 1$ فإنّه يوجد $\eta, \delta \in O_K$ بحيث $\gamma = \eta\delta, \beta = \varepsilon'\delta^2, \alpha = \varepsilon\eta^2$ حيثُ $\varepsilon, \varepsilon'$ عناصر واحدة.

تمهيدية3:[3]

التطابق $X^2 \equiv -3(mod\Delta)$ قابل للحل إذا وفقط إذا كانت الأعداد الأوليّة التي تقسم Δ من الشكل $6k + 1$.

النتائج والمناقشة:

إنّ النتائج والأفكار التي ذكرناها؛ فضلاً عن بعض الأفكار الرياضية الجديدة (مناقشة قابلية حلّ إحدى المعادلتين (I)أو (II) بالاعتماد على قابلية حل المعادلة الأخرى) والتي أضفناها إلى هذه النتائج، سمحت لنا بدراسة قابلية حل المعادلتين (I) وَ (II) معاً في آنٍ واحد. تمّ الحصول على نتائج جديدة ومهمّة في هذا المجال نعرضها فيما يأتي:

لتكن المعادلة $aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = \pm 1(I)$ حيث يكون a, b عددين صحيحين ما، عندئذٍ نلاحظ وضوحاً أن المعادلة (I) لا تكون قابلة للحل إذا كان a عدداً زوجياً أو إذا كان لـِ $a, 2b$ أو لـِ a, b قاسماً مشتركاً، لذلك سوف نفرض أن a عدد فردي، وأنّ a, b أوليان فيما بينهما؛ فضلاً عن ذلك سوف نفرض أنّ المعادلة (I) قابلة للحل إذا كانت إحدى المعادلتين:

$$aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = +1 \text{ أو } aX^2 + 2bXY - 3aY^2 = -1$$

قابلة للحل، كذلك سوف نفرض أن العدد الصحيح الموجب $\Delta = b^2 + 3a^2$ حرّ من التربيع وسنسميه مميز المعادلة(I)،

ولنناقش قابلية حلّ المعادلتين(I) والمعادلة $X^2 - \Delta Y^2 = -3 (II)$ على النحو الآتي:

أولاً: سنبين أن المعادلة (I) تكون غير قابلة للحل إذا كانت المعادلة (II) غير قابلة للحل في مجموعة الأعداد الصحيحة Z وذلك من خلال المبرهنة الآتية:

مبرهنة *1*:

إذا كان a, b عددين صحيحين أوليين فيما بينهما، وكان $\Delta = b^2 + 3a^2$ عدداً صحيحاً موجباً حراً من التربيع، عندئذٍ لدينا الآتي:

إذا كانت المعادلة (II) غير قابلة للحل، فإن المعادلة (I) تكون غير قابلة للحل.

البرهان:

لنفرض أن المعادلة (II) غير قابلة للحل، ولنفرض جدلاً أنّ المعادلة (I) قابلة للحل، عندئذٍ يوجد $(,L) \in Z^2$ بحيث إنّ:

$$aK^2 + 2bKL - 3aL^2 = \pm 1$$

علاوةً على ذلك يكون كل من العددين $\alpha = a + b\sqrt{-3}$, $\beta = \left(K + \sqrt{-3}\right)^2$ عنصراً في الحلقة $Z\left[\sqrt{-3}\right]$، ومنه نجد أنّ:

$$\alpha\beta = \left(b + a\sqrt{-3}\right)\left(K + L\sqrt{-3}\right)^2$$
$$= \left(b + a\sqrt{-3}\right)\left(K^2 + 2KL\sqrt{-3} - 3L^2\right)$$
$$= bK^2 + 2bKL\sqrt{-3} - 3bL^2 + aK^2\sqrt{-3} - 6aKL - 3aL^2\sqrt{-3}$$
$$= (bK^2 - 6aKL - 3bL^2) + (aK^2 + 2bKL - 3aL^2)\sqrt{-3} (*)$$

الآن ليكن $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ بحيث إن:

$$\varepsilon(bK^2 - 6aKL - 3bL^2) = +1$$

وليكن $v = \varepsilon(bK^2 - 6aKL - 3bL^2)$، عندئذٍ:

$$v + \sqrt{-3} = \varepsilon(bK^2 - 6aKL - 3bL^2) + \varepsilon(aK^2 + 2bKL - 3aL^2)\sqrt{-3}$$

ومنه حسب $(*)$ ينتج أنّ: $v + \sqrt{-3} = \varepsilon\alpha\beta$ ومنه لنأخذ نظيم الطرفين، فنجد أنّ:

$$\begin{aligned} N(v + \sqrt{-3}) &= N(\varepsilon\alpha\beta) = N(\varepsilon)N(\alpha)N(\beta) \\ &= N(\alpha)N(\beta) \\ &= (b^2 + 3a^2)(K^2 + 3L^2)^2 \end{aligned}$$

لأنّ:

$$N(\varepsilon) = \varepsilon^2 = 1$$

$$N(\beta) = \mathrm{N}\left(\left(K + L\sqrt{-3}\right)^2\right) = \left(\mathrm{N}\left(K + L\sqrt{-3}\right)\right)^2 = (K^2 + 3L^2)^2$$

لنضع $w = K^2 + 3L^2$ فنجد مما سبق أنّ: $v^2 + 3 = \Delta w^2$؛ وبالتالي: $v^2 - \Delta w^2 = -3$ إذاً (v, w) حل للمعادلة (II) وبذلك نكون قد حصلنا على تناقض، وعليه فإنّ الفرض الجدلي أنّ (I) تكون قابلة للحل عندما (II) غير قابلة للحل غير ممكن، إذاً ما ورد في نص المبرهنة صحيح.

تمهيدية 1:

إذا كان Δ عدداً صحيحاً حرّاً من التربيع، وكانت المعادلة (II) قابلة للحل و (v, w) حلّاً لها، عندئذٍ يكون الآتي:

أ. Δ عدد فردي وَ $v \not\equiv w (mod 2)$.

ب. إذا كان w عدداً زوجياً، فإنّ $w = 2w_1$ حيث w_1 عدد فردي.

ج. العددان $v+\sqrt{-3}, v-\sqrt{-3}$ أوليان فيما بينهما في الحلقة $Z[\sqrt{-3}]$، أي إنّ:

$$\left(v+\sqrt{-3}, v-\sqrt{-3}\right)=1$$

البرهان:

أ. بما أنّ Δ حرّ من التربيع، فإنّ Δ لا يقبل القسمة على العدد *4*؛ وبالتالي إذا كان زوجياً فهو من الشكل $4k+2$ ومنه نجد من جهة أولى أنّ:

$$v^2-\Delta w^2 \equiv v^2-2w^2(mod4)$$

ومن جهة ثانية لدينا:

$$v^2-\Delta w^2 \equiv -3(mod4)$$

ومنه حسب خواص التطابقات ينتج أنّ:

$$v^2-2w^2 \equiv -3(mod4)$$

وبالتالي: $v^2 \equiv -1(mod4)$ وهذا غير ممكن، إذاً لا يمكن أن يكون Δ عدداً زوجياً، وعليه فإن Δ عدد فردي.

لدينا $v^2-\Delta w^2=-3$ و Δ عدد فردي، ومنه ينتج أنّ:

إذا كان w عدداً زوجياً فإنّ v يكون عدداً فردياً، أمّا إذا كان w عدداً فردياً، فإنّ v يكون عدداً زوجياً، إذاً لا يمكن أن يكون v,w زوجياً معاً أو فردياً معاً، وهذا يعني أنّ: $v \not\equiv w(mod2)$.

ب. نفرض أنّ w عدد زوجي، عندئذٍ $w=2^k.w_1$ حيث $k\geq 1$ وَ w_1 عدد فردي، فإذا كان $k\geq 2$ فإن $w^2\equiv 0(mod8)$ كما يكون حسب (أ) v فردياً وَ (v,w) حل للمعادلة (II)؛ لذلك يكون $v^2\equiv 1(mod8)$؛ وبالتالي يكون $\Delta w^2\equiv 0(mod8)$ وَ $\Delta w=v^2+3\equiv 4(mod8)$.

ومنه ينتج أنّ $0\equiv 4(mod8)$ وهذا مستحيل. إذاً $k=1$؛ وبالتالي $w=2w_1$ حيث w_1 عدد فردي.

ج. نفرض أنّ: $d=gcd\left(v+\sqrt{-3}, v-\sqrt{-3}\right)$ عندئذٍ يكون $d|2v$؛ وبالتالي:

$$N(d)|N(2v) = 4v^2$$

لذلك فإنّ: $N(d)$ عدد زوجي، ويكون لدينا حالتان:

1. w عدد فردي، وفي هذه الحالة يكون Δw^2 عدداً فردياً، وذلك حسب (أ) كما يكون أيضاً $N(w)|N(v+\sqrt{-3}) = \Delta w^2$، إذاً $N(d)|v+\sqrt{-3} =$ $\Delta w^2(*)$ وهذا مستحيل.

2. w عدد زوجي، وفي هذه الحالة، فإنّه حسب (ب) يكون $w = 2w_1$ حيث w_1 عدد فردي، ومنه حسب $(*)$ يكون $N(d)|w^2$؛ وبالتالي $N(d)|w$ إذاً $N(d) = 1$ أو $N(d) = 2$.

إنّ $N(d) \neq 2$ لأنّه إذا كان $N(d) = 2$ فإنّه يوجد $n, m \in Z$ بحيث إنّ $d = m + n\sqrt{-3}$ وإنّ $2 = N(d) = m^2 + 3n^2$ وهذا غير ممكن؛ لأنّ $m^2 + 3n^2 = 2$ إذا وفقط إذا كان $n = 0$ وَ $m = \sqrt{2} \notin Z$، إذاً $N(d) = 1$؛ وبالتالي $d \in \{+1, -1\}$ وبما أنّ d موجب إذاً $d = 1$.

ومنه ينتج أنّ العددين $v + \sqrt{-3}, v - \sqrt{-3}$ أوليان فيما بينهما.

مبرهنة 2:

إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين أوليين فيما بينهما، بحيث إنّ $\Delta = b^2 + 3a^2$ عدد صحيح موجب حرّ من التربيع، وإنّ المعادلة (II) قابلة للحل، عندئذٍ لدينا الآتي:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة (II) قابلة للحل و (v, w) حلّاً لها هو أن يكون:

$$b + a\sqrt{-3} = \begin{cases} gcd(v + \sqrt{-3}.\Delta) \\ \quad or \\ gcd(v - \sqrt{-3}.\Delta) \end{cases} \quad (*)$$

البرهان:

نفــرض أنّ $(,w)$ حــل للمعادلـــة (II) وأنّ الشــرط $(*)$ محقــق، عندئــذٍ: $b + a\sqrt{-3}$ يقسم العدد $v + \sqrt{-3}$ أو يقسم $v - \sqrt{-3}$ في الحلقة $Z\left[\sqrt{-3}\right]$.

فإذا كان $b + a\sqrt{-3}$ يقسم $v + \sqrt{-3}$ في الحلق $Z\left[\sqrt{-3}\right]$ نجد مما سبق أنّ:

$$\left(\frac{v+\sqrt{-3}}{b+a\sqrt{-3}}\right)\left(\frac{v-\sqrt{-3}}{b-a\sqrt{-3}}\right) = w^2$$

وأنّ كـــل مـــن العـــددين $\alpha = \frac{v+\sqrt{-3}}{b+\sqrt{-3}}$ وَ $\beta = \frac{v-\sqrt{-3}}{b-a\sqrt{-3}}$ ينتمـــي إلـــى الحلقـة $Z\left[\sqrt{-3}\right]$، عـلاوةً علـى ذلـك، فإنّـه يكـون حسـب (ج) مـن التمهيديـة (1) أنّ α, β أوليـان فيمـا بينهمـا. ومنـه بحسـب التمهيديـة (2) فإنّـه يوجـد $\gamma, \delta \in Z\left[\sqrt{-3}\right]$ حيثُ $\delta = x + y\sqrt{-3}, \gamma = x - y\sqrt{-3}$، وبحيث إنّ:

$$w = x^2 + 3y^2, \frac{v+\sqrt{-3}}{b+a\sqrt{-3}} = \varepsilon\left(x + y\sqrt{-3}\right)^2$$

وينتج من ذلك أنّ:

$$v + \sqrt{-3} = \varepsilon\left(b + a\sqrt{-3}\right)\left(x + y\sqrt{-3}\right)^2 \varepsilon\left(b + a\sqrt{-3}\right)\left(x^2 + 2xy\sqrt{-3} - 3y^2\right)\varepsilon(bx^2 - 6axy - 3by^2) + \varepsilon(ax^2 + 2bxy - 3ay^2)\sqrt{-3}$$

ومنه بمطابقة أمثال $\sqrt{-3}$ نجد أنّه يوجد $(x, y) \in Z \times Z$ بحيث إنّ:

$$ax^2 + 2bxy - 3ay^2 = \pm 1$$

أي إنّ المعادلة (I) قابلة للحل.

العكس:

نفرض أنّ المعادلة (I) قابلة للحل، عندئذٍ يوجد $(K, L) \in Z \times Z$ بحيث إنّ:

$$aK^2 + 2bKL - 3aL^2 = \pm 1$$

ومنه وبطريقة مماثلة لإثبات المبرهنة (1) نجد أنّه يوجد $(v,w) \in Z \times Z$ حيث:

$$v = \varepsilon(bK^2 - 6aKL - 3bL^2) w = K^2 + 3L^2$$

بحيث إنّ (v,w) حل للمعادلة (2)، كما أنّ:

$$v + \sqrt{-3} = (b + a\sqrt{-3})(K + L\sqrt{-3})^2$$

ومنه نجد أنّ:

$$gcd(v + \sqrt{-3}, \Delta) = (b + a\sqrt{-3}).\, gcd\left(b - a\sqrt{-3}, (K + L\sqrt{-3})^2\right)$$

علاوةً على ذلك نجد أنّ $gcd\left(b - a\sqrt{-3}, (K + L\sqrt{-3})^2\right) = 1$ وذلك لأنه إذا كان $\alpha \in Z[\sqrt{-3}]$ حيث $\alpha \neq 0$ وكان $\alpha|(b - a\sqrt{-3})$ وَ $\alpha|(K + L\sqrt{-3})^2$ فإنّ:

$$\alpha|(K + L\sqrt{-3})$$

وعليه فإنّ $K + L\sqrt{-3} \equiv 0(mod\alpha)$؛ وبالتالي $K \equiv -L\sqrt{-3}(mod\alpha)$ومنه من عبارة v السابقة نجد أنّ:

$$\begin{aligned} v &\equiv \varepsilon\left(b(-L\sqrt{-3})^2 - 6a(-L\sqrt{-3})L - 3bL^2\right)(mod\alpha) \\ &\equiv \varepsilon(-3bL^2 + 6aL^2\sqrt{-3} - 3bL^2)(mod\alpha) \\ &\equiv \varepsilon\left(-6L^2(b - a\sqrt{-3})\right)(mod\alpha) \\ &\equiv 0(mod\alpha) \end{aligned}$$

ومنه ينتج أنّ $\alpha|v$؛ وبالتالي $N(\alpha)|(v) = v^2$، كذلك لدينا أيضاً $\alpha|w$؛ لأنّ $w = K^2 + 3L^2$؛ وبالتالي: $N(\alpha)|gcd(v^2, w^2)$ إذاً $N(\alpha) = 1$، وعليه فإنّ $\alpha = 1$، إذاً:

$$gcd\left(b - a\sqrt{-3}, (K + L\sqrt{-3})^2\right) = 1$$

وبالتالي:

$$b + a\sqrt{-3} = gcd(v + \sqrt{-3}, \Delta)$$

مثال 1:

إذا كان$a=1,b=6$ فإنّ $\Delta=6^2+3(1)^2=39$ عدد فردي حر من التربيع، وأنّ $(v,w)=(6,1)$ حل للمعادلة (II)؛ وبالتالي:

$$v+\sqrt{3}=6+\sqrt{-3}, b+a\sqrt{-3}=6+\sqrt{-3}$$

ومنه نجد أنّ $(6+\sqrt{-3},\Delta)=6+\sqrt{-3}$؛ وبالتالي حسب المبرهنة 2 نجد أنّ المعادلة (I) قابلة للحل، وعليه فإنّ المعادلة $X^2+12XY-3Y^2=\pm1$ قابلة للحل.

لإيجاد الحل لهذه المعادلة لدينا:

$$X^2+12XY-3Y^2=\pm1 \Leftrightarrow (X+6Y)^2-36Y^2-3Y^2=\pm1$$
$$\Leftrightarrow (X+6Y)^2-\Delta Y^2=\pm1$$

لنضع $X+6Y=X_1, Y=Y_1$، فنجد أنّ المعادلة (I) قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت المعادلة:

$$X_1^2-\Delta Y_1^2=\pm1 \qquad (*)$$

قابلة للحل.

وبما أن المعادلة $X_1^2-\Delta Y_1^2=\pm1$ قابلة للحل دوماً نجد أن المعادلة $(*)$ قابلة للحل وأنّ $(X_1,Y_1)=(25,1)$ حل لها، وعليه فإنّ $(X,Y)=(1,4)$ حل للمعادلة:

$$X^2+12XY-3Y^2=\pm1$$

مبرهنة 3:

إذا كانa,b عددين صحيحين موجبين أوليين فيما بينهما، بحيث إنّ$\Delta=b^2+3a^2$ عدد حرّ من التربيع، وإنّ المعادلة(I) قابلة للحل، عندئذٍ لدينا الآتي:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة(II) قابلة للحل و (K, L) حلاً لها هو أن يوجد عددان صحيحان m, n يحققان:

$$(*)\begin{cases} L^2 = m^2 + 3n^2 \\ K = bm + 3an \\ am - bn = \pm 1 \end{cases}$$

البرهان:

أولاً: نفرض أنّه يوجد عددان صحيحان يحققان العلاقات $(*)$ عندئذٍ:

$$\Delta L^2 = (b^2 + 3a^2)(m^2 + 3n^2)$$
$$= b^2m^2 + 3b^2n^2 + 3a^2m^2 + 9a^2n^2$$
$$= (bm + 3an)^2 + 3(am - bn)^2$$
$$= K^2 + 3$$

وينتج من ذلك أنّ $K^2 - \Delta L^2 = -3$ إذاً $(, L)$ حل للمعادلة(II).

العكس:

نفرض أنّ المعادلة (II) قابلة للحل وأنّ $(, L)$ حل لها عندئذٍ $(K, 1)$ حل للمعادلة:

$$X^2 - \Delta' Y^2 = -3$$

حيث $\Delta' = \Delta L^2$ وينتج من ذلك أنّ $K^2 \equiv -3(mod\Delta')$، وعليه فإنّ التطابق$X^2 \equiv -3(mod\Delta')$ قابل للحل ومنه وحسب التمهيدية 3 تكون العوامل الأولية لِ Δ'؛ وبالتالي لِ L هي من الشكل$6k + 1$، ويكون لدينا حالتان:

1) L عدد فردي، في هذه الحالة نجد حسب التمهيدية 1 أنّه يوجد عددان صحيحانd, c بحيث أنّ $L = c^2 + 3d^2$؛ وبالتالي:

$$L^2 = (c^2 + 3d^2)^2 = (c^2 - 3d^2)^2 + 3(2cd)^2$$

لنضع $n = c^2 - 3d^2$ وَ $m = 2$ فنجد أنّ $L^2 = n^2 + 3m^2$.

2) L عدد زوجي، في هذه الحالة حسب (ب) من التمهيدية (1) يكون $L = 2L'$ حيث L' عدد فردي؛ وبالتالي $2L = 4L'$ وتكون جميع العوامل الأولية الفردية التي تقسم L' هي من الشكل $6k + 1$؛ وبالتالي فإنّه بحسب التمهيدية 1 يوجد عددان صحيحان d, c بحيث إنّ $2L = c^2 + 3d^2$، ومنه نجد أنّ $L = \frac{c^2+3d^2}{2}$؛ وبالتالي:

$$L^2 = \left(\frac{c^2 + 3d^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{c^2 - 3d^2}{2}\right)^2 + 3(cd)^2$$

نضع $m = \frac{c^2-3d^2}{2}$ وَ $n = cd$، فنجد أنّ $L^2 = m^2 + 3n^2$.

بقي أن نبرهن أنّه إذا كان $(, L)$ حلاً للمعادلة (II) وَ $L^2 = m^2 + 3n^2$ فإنّ:

$$K = bm + 3an, am - bn = \pm 1$$

لدينا $K^2 - \Delta L^2 = -3$ إذاً:

$$K^2 + 3 = \Delta L^2 (b^2 + 3a^2)(m^2 + 3n^2)(bm + 3an)^2 + 3(3am - bn)^2$$

إذا كان $am - bn \neq \pm 1$ من أجل جميع الأعداد الصحيحة a, b, m, n التي تحقق:

$$\Delta = b^2 + 3a^2 \text{ وَ } L^2 = m^2 + 3n^2$$

فإنّ المعادلة (II) تكون غير قابلة للحل، وهذا تناقض وينتج من ذلك أنّ $am - bn = \pm 1$ وَ $K = bm + 3an$.

مثال 2:

من أجل $a = 1, b = 6$ حسب المثال 1 المعادلة (I) قابلة للحل؛ فضلاً عن ذلك نجد من أجل $n = 0, m = 1$ أنّ: $K = 6, L^2 = 36$ أي إنّ (K, L) حل للمعادلة (II).

مبرهنة 4:

إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين أوليين فيما بينهما وَ $\Delta = b^2 + 3a^2$ عدداً أولياً، عندئذٍ لدينا الآتي:

المعادلة (I) قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت المعادلة (II) قابلة للحل.

البرهان:

أولاً نفرض أنّ المعادلة (II) قابلة للحل، عندئذٍ يوجد $(, L) \in Z \times Z$ بحيثُ إنَّ:

$$aK^2 + 2bKL - 3aL^2 = \pm 1$$

نُعرّف العددين:

$$w = K^2 + 3L^2, v = \pm(bK^2 - 6aKL - 3bL^2)$$

نجد من المطابقة:

$$(bK^2 - 6aKL - 3bL^2) + 3(aK^2 + 2abKL - 3aL^2)$$
$$= (b^2 + 3a^2)(K^2 + 3L^3)^2$$

$$v^2 + 3 = \Delta w^2$$

ومنه نجد أنّ $(, w)$ حل للمعادلة (II) أي إنّ المعادلة (II) قابلة للحل.

العكس:

نفرض أنّ المعادلـة (II) قابلـة للحل، وأنّ Δ عدد أولـي، عندئذٍ يوجد $(,w) \in$ $Z \times Z$ بحيثُ إنَ: $v^2 + \Delta w^2 = -3$؛ وبالتالي $v^2 + 3 = \Delta w^2 (*)$.

نكتب Δ في الحلقة $Z[\sqrt{-3}]$ بالشكل:

$$\Delta = (b + a\sqrt{-3})(b - a\sqrt{-3})$$

ونكتب $(*)$ في الحلقة $Z[\sqrt{-3}]$ بالشكل:

$$(v + \sqrt{-3})(v - \sqrt{-3}) = (b + a\sqrt{-3})(b - a\sqrt{-3})w^2 \quad (**)$$

فنجـد أنّ كـلاً مـن العـددين $b + a\sqrt{-3}, b - a\sqrt{-3}$ أولـي فـي الحلقـة $Z[\sqrt{-3}]$؛ لأنّ:

$$N(b + a\sqrt{-3}) = N(b - a\sqrt{-3}) = \Delta$$

وَ Δ عدد أولي، وباعتبار أنَّ $\Delta \vee b + a\sqrt{-3}$، فإنّه بحسب $(**)$:

$$b + a\sqrt{-3} \,\big|\, v + \sqrt{-3} \text{ أو } b + a\sqrt{-3} \,\big|\, v - \sqrt{-3}$$

وبالتـالي يمكـن أن نفـرض أنَّ $b + a\sqrt{-3} | v + \sqrt{-3}$، وعليـه فـإنَّ $b - a\sqrt{-3} | v - \sqrt{-3}$ كمـا أنّ كـلاً مـن العـددين $\frac{v+\sqrt{-3}}{b+a\sqrt{-3}}, \frac{v-\sqrt{-3}}{b-a\sqrt{-3}}$ ينتمـي إلـى $Z[\sqrt{-3}]$، وهمـا أوليـان فيمـا بينهمـا؛ ومنـه بحسـب التمهيديـة 2 فإنّـه يوجـد $K, L \in Z$ بحيثُ إنَّ:

$$\frac{v + \sqrt{-3}}{b + a\sqrt{-3}} = \varepsilon(K + L\sqrt{-3})^2, w = K^2 + 3L^2$$

وبالتالي:

$$v + \sqrt{-3} = \varepsilon(K + L\sqrt{-3})^2(b + a\sqrt{-3})$$

وبمطابقة أمثال $\sqrt{-3}$ نجد أنّه يوجد $(K, L) \in Z \times Z$، بحيث إنّ:

$$aK^2 + 2bKL - 3aL^2 = \pm 1$$

ومنه نجد أنَّ $(,L)$ حل للمعادلة (I)؛ وبالتالي (I) قابلة للحل.

أمثلة:

إذا كان $a = 3, b = 2$، فإنّ:

$$\Delta = b^2 + 3a^2 = 4 + 3.3^2 = 31$$

المعادلة $X^2 - 31Y^2 = -3$ قابلة للحل.

مثال 3:

من أجل $a = 3, b = 2$، فإنّ $\Delta = b^2 + 3a^2 = 31$ عدد أوليّ، كما أنّ المعادلة (II) قابلة للحل وَ $(-11,2)$ حل لها؛ وبالتالي المعادلة (I) حسب المبرهنة 4 قابلة للحل وَ $(-5,2)$ حلّ لها.

النتائج والتوصيات:

إنّ دراسة قابلية حل المعادلتين $(I), (II)$ تفيد في دراسة حالات أخرى من المعادلات الديوفنتية، كما أنّها تفيد في دراسة مسألة تمثيل الأعداد الصحيحة بصيغ تربيعية ثنائية، وفي مسألة القيمة الأصغرية لصيغة تربيعية.

المراجع:

[1] Hardy,K and William,K.S.,1986.On the solvability of the Diophantine equation $dv^2 - 2evw - dw^2 = 1$, Pacific journal of mathematics, V.124, No.1, pp.145-158.

[2] Kaplan,P., 1986. Pells equations $X^2 - NY^2 = -1, -4$ and continued fraction, Journal of number theory, V.23, pp.169-182.

[3] Koch,F.H.,2014. Quadratic Irrationals and introduction to classical number theory, CRC press.

[4] Marlewski,A., Zarzucki,P.,2004. Infinitly many positive solutions of the Diophantine equations $x^2 - kxy + y^2 + x = 0$, comput. Math. Appl, V.47, No.1, pp.115-121.

[5] Mollin,R.A., 2001. A Simple criterion for solvability of both equations $X^2 - DY^2 = \pm C$, New York, J. Math, V.7, pp.87-97.

[6] Mollin,R.A., 2002. Ideal criterion for both $X^2 - DY^2 = m_1$and $X^2 - DY^2 = m_2$ to have primitive solutions for any integer m_1, m_2 prime to $D > 0$, Serdica Math.J, V.28, pp.175-188.

[7] Mordell,L.J.,1969. Diophantine equations, Academic press, London and New York.

[8] Refik,K., Olcay,K., Zafer,S.,2012. On the Diophantine equation $x^2 - kxy + y^2 + 2^n = 0$, Miskolc mathematical notes, V.13, No.2, PP.375-388.

[9] Robertson,J. P., 2014. Fundamental Solutions to generalized Pell equation $X^2 - DY^2 = N$, pp.1-26.

[10] Rose,H.E.,1988. A Course in number theory, Clarendom Press.

[11] Bolken,E.D., 1970. Elementary number theory, An Algebraic Approach, W.A.Benjamin. New York.