إثبات تخمين تيكان المتعلق بالمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$

د. حسن سنكري*

الملخص

يهدف هذا البحث لإثبات تخمين تيكان (A.Teckan) المتعلق بالمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ حيث قمنا بدراسة العلاقة بين الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ والحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$، وأعطينا صيغة تعاودية جديدة لحلول المعادلة $X^2 - DY^2 = 2$، ثم استخدمنا ذلك في إثبات التخمين.

الكلمات المفتاحية: معادلة بل، الحل الأساسي، تخمين تيكان، نظيم عدد تربيعي.

* أستاذ مساعد في قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين.

Proof Teckan Conjecture related of Equation $X^2 - DY^2 = 2$

Dr. Hassan Sankari*

Abstract

The aim of this research is proving Teckan conjecture related of equation $X^2 - DY^2 = 2$. Where we study the relation between fundamental solution of equation $X^2 - DY^2 = 2$ and the fundamental solution of equation $X^2 - DY^2 = 1$ .Also we give a new recursive formula to find solution of equation $X^2 - DY^2 = 2$, then we use it to prove the conjecture.

Key words: Pell's equation, fundamental solution, Teckan conjecture, norm of quadratic number.

*Assistant Professor, Department of mathematics, Tishreen University. Lattakia ,Syria

مقدمة:

ليكن D عدداً صحيحاً موجباً حراً من التربيع؛ free quadratic integer number؛ ليس من قواسمه أي مربع تام سوى العدد واحد، عندئذٍ تسمّى المعادلة:

$$(1) \qquad X^2 - DY^2 = N$$

معادلة بل المعممة، حيث N عدد صحيح.

إن دراسة المعادلة (1) تتضمن معرفة فيما إذا كان يوجد حلول لهذه المعادلة في مجموعة الأعداد الصحيحة أم لا، و من ثم إيجاد جميع الحلول لهذه المعادلة إذا كانت قابلة للحل.

يسمى الحل (X,Y) للمعادلة (1) حلاً موجباً إذا كان X وَ Y موجبين، و يسمى حلاً أولياً إذا كان X وَ Y أوليين فيما بينهما، إضافة إلى ما سبق إذا كانت المعادلة (1) قابلة للحل، فإنه من بين الحلول الموجبة لهذه المعادلة يوجد حل (X_1, Y_1) يملك أصغر قيم لـِ X وَ Y، أي أن $X_1 \le X$ وَ $Y_1 \le Y$ من أجل كل حل موجب (X,Y) لهذه المعادلة ويسمى الحل الأساسي لهذه المعادلة.

دُرست المعادلة (1) من أجل قيم محدودة لـِ N، فمن أجل $N = 1$ تسمى المعادلة:

$$(2) \qquad X^2 - DY^2 = 1$$

معادلة بل، و قد دُرست في القرن السابع عشر من قِبل كل من (برونكر W.Brouncker، فريينل B.Fre'niel، والس J.Wallis ......) وفي القرن الثامن عشر حاول أولر حل المعادلة (2) عن طريق الكسور المستمرة، وكان الإسهام الرئيسي لـِ أولر هو تسميته المعادلة (2) بمعادلة بل، وغالباً ما يقول الرياضيون [6] أن أولر أخطأ في تسميته المعادلة بهذا الاسم وأنه نسب عمل برونكر في هذه المعادلة لـِ بل، وفي عام 1766 استخدم لاغرانج الكسر المستمر الممثِل لـِ $\sqrt{D}$ ليعطي البرهان الأول والكامل على أن معادلة بل $X^2 - DY^2 = 1$ دائماً قابلة للحل في مجموعة الأعداد الصحيحة.

إضافة إلى ذلك بُرهِنَ أنه إذا كان (X_1, Y_1) الحل الأساسي للمعادلة (2) فإن جميع حلولها الموجبة تعطى بالصيغة: $X_n + Y_n\sqrt{D} = \left(X_1 + Y_1\sqrt{D}\right)^n$ وأنه يوجد تقابل بين

مجموعة الحلول الموجبة (X_n, Y_n) لهذه المعادلة و بين مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $X_n + Y_n\sqrt{D}$.

حديثاً في أواخر القرن الماضي نشر الرياضيان P.Kaplan and K.S.Williams في[1] نتائج دراستهم لقابلية حل المعادلتين $X^2 - DY^2 = -4$ وَ $X^2 - DY^2 = -1$ في آن واحد، ونشر الرياضي R.A.Mollin في [2] نتائج دراسته لقابلية حل المعادلتين $X^2 - DY^2 = C$ وَ $X^2 - DY^2 = -C$ في آن واحد.

رياضيون آخرون في [3]،[4]،[5] قد تطرقوا إلى دراسة المعادلة (1) من أجل $\mathrm{N} = \pm 1$ وَ $N = 2^t$، وأيضاً في [7] برهن تيكان ما يلي:

إذا كان(a, b) الحل الأساسي لمعادلة بل $X^2 - DY^2 = 1$ عندئذٍ فإن الحلول (x_n, y_n) للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ تعطى بالعلاقتين (انظر [7] ص 80):

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} &= aX_n + bDY_n \\ Y_{n+1} &= bX_n + aY_n \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

وضع تيكان التخمين الآتي (انظر [7] ص 86):

إذا كان (K, L) الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ عندئذٍ تعطى الحلول الأخرى لهذه المعادلة بالعلاقتين التعاوديتين الآتيتين:

$$\begin{aligned} X_n &= (2K^2 - 1)(X_{n-1} - X_{n-2}) + X_{n-3} \\ Y_n &= (2K^2 - 1)(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + Y_{n-3} \end{aligned}$$

وذلك من أجل كل $n \geq 4$.

هدف البحث و أهميته:

إن هدف هذا البحث هو إثبات صحة تخمين تيكان المذكور أعلاه و بعض النتائج المهمة المتعلقة بالعلاقة بين الحلول الأساسية للمعادلتين $X^2 - DY^2 = 1$ وَ $X^2 -$

$DY^2 = 2$ وإن أهمية هذا البحث بالإضافة إلى أنه أجاب على أحد المسائل المفتوحة، فإنه سيساعد في دراسة قابلية حل المعادلتين$X^2 - DY^2 = -1$ وَ $X^2 - DY^2 = -2$ وذلك بعد إيجاد علاقة بين الحلين الأساسيين لهاتين المعادلتين.

طرائق البحث و مواده:

إن البحث موضوع رياضي مجرد تم انجازه بالاعتماد على مراجع علمية تخصصية وبحوث علمية منشورة في دوريات عالمية.

النتائج والمناقشة:

إن النتائج التي ذكرناها في المقدمة والمتعلقة بقابلية حل المعادلة $X^2 - DY^2 = N$ من أجل بعض القيم الخاصّة لـ N، إضافة إلى نتائج بعض الأعمال العلمية، والمشار إليها في المراجع، وكذلك بعض الأفكار الجديدة (كمناقشة العلاقة بين الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$ وَالحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$)، والتي أضفناها إلى هذه النتائج سمحت لنا بالحصول على نتائج جديدة وهامّة استخدمناها في إثبات صحة التخمين الذي وصفه تيكان بخصوص حلول المعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ والمذكور أعلاه.

تعريف (1):[5]

المرافق (conjugate) $\bar{\alpha}$ و النظيم (norm) $N(\alpha)$ للعدد $\alpha = a + b\sqrt{D} \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ يعرفان بالشكل الآتي:

$$\bar{\alpha} = a - b\sqrt{D}\ ,\ \ N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 - Db^2$$

ويحققان الخواص الآتية:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \\
&(2)\quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} \\
&(3)\quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha \\
&(4)\quad N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)
\end{aligned}$$

تمهيدية (1):

ليكن D عدداً صحيحاً موجباً حراً من التربيع حيث $D > 2$، عندئذٍ:

1- إذا كان $(,L)$ حلاً للمعادلة (1) $X^2 - DY^2 = 2$ فإن $(K^2 - 1, KL)$ حل للمعادلة (2) $X^2 - DY^2 = 1$ و أن $(K^2 - 1, KL) = \left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$.

2- إذا كان $(,L)$ الحل الأساسي للمعادلة (1) فإن $(K^2 - 1, KL)$ هو الحل الأساسي للمعادلة (2).

البرهان:

1- بما أن $(,L)$ حل للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ فإن $K^2 - DL^2 = 2$ و منه نجد أن:

$$\begin{aligned}(K^2-1)^2 - D(KL)^2 &= K^4 - 2K^2 + 1 - DK^2L^2\\ &= K^2(K^2 - DL^2) - 2K^2 + 1\\ &= 2K^2 - 2K^2 + 1 = 1\end{aligned}$$

وأن:

$$\left(\frac{K^2 + DL^2}{2}, KL\right) = \left(\frac{K^2 + DL^2 - 2}{2}, KL\right) = (K^2 - 1, KL)$$

2- بحسب (1) يكفي أن نبرهن أن $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$ الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$، نفرض جدلاً أن $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$ ليس الحل الأساسي للمعادلة (2)، عندئذٍ يوجد $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ بحيث أن $\beta = x_1 + y_1\sqrt{D}$ وأن (x_1, y_1) الحل الأساسي للمعادلة (2)، ومنه حسب ماسبق نجد من أجل $w = K + L\sqrt{D}$ وَ $\alpha = \frac{w^2}{2}$ فإن $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ و بالتالي يوجد $1 < n \in \mathbb{Z}$ بحيث $(*)$ $\alpha = \beta^n$.

إذاً نميز حالتين إما n عدد زوجي أو n عدد فردي:

حالة 1: إذا كان n عدد زوجي، أي $n = 2t$، عندئذٍ بحسب (*) يكون $\alpha = \beta^{2t}$ وبالتالي فإن $\frac{w^2}{2} = \beta^{2t}$ وعليه فإن (I) $\left(\frac{w}{\beta^t}\right)^2 = 2$، من جهة ثانية لدينا $\frac{w}{\beta^t} \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ إذاً يوجد $a, b \in \mathbb{Q}$ بحيث $\frac{w}{\beta^t} = a + b\sqrt{D}$ وبالتالي فإن:

$$2 = \left(\frac{w}{\beta^t}\right)^2 = \left(a + b\sqrt{D}\right)^2 = a^2 + b^2D + 2ab\sqrt{D}$$

إذاً: $(a^2+b^2D-2)+2ab\sqrt{D}=0$ وهذه العلاقة تقتضي أن:

$$a^2+b^2D-2=0 \qquad (1)$$
$$2ab=0 \qquad (2)$$

من (2) نجد أن $2ab=0$ إذا وفقط إذا كان $a=0$ أو $b=0$ لأن $2\neq 0$ وَ $a,b\in\mathbb{Q}$ وَ $\mathbb{Q}$ حقل جبري فهو ساحة صحيحة.

إذا كان $a=0$ نجد حسب (1) أن $b^2=\frac{2}{D}$ وهذا مرفوض لأن $b\in\mathbb{Q}$.

إذا كان $b=0$ نجد من (1) أن $a^2=2$ وهذا مرفوض أيضاً لأن $a\in\mathbb{Q}$.

مما سبق نجد أن الفرض الجدلي أن $\left(\frac{K^2+DL^2}{2},KL\right)$ ليس الحل الأساسي خاطئ لذلك $\left(\frac{K^2+DL^2}{2},KL\right)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2-DY^2=1$.

حالة 2: إذا كان n عدد فردي، أي $n=2t+1$ ، عندئذٍ بحسب (*) يكون $\frac{w^2}{2}=\alpha=\beta^{2t+1}=\beta\beta^{2t}$ وبالتالي فإن (II) $\left(\frac{w}{\beta^t}\right)^2=2\beta$ نفرض أن $\frac{w}{\beta^t}=a+b\sqrt{D}$ حيث $a,b\in\mathbb{Q}$ عندئذٍ بما أن $\left(\frac{w}{\beta^t}\right)^2=2\beta$ و $\beta=x_1+y_1\sqrt{D}$ حيث $x_1,y_1\in\mathbb{Z}^+$ أي: $\left(a+b\sqrt{D}\right)^2=2\left(x_1+y_1\sqrt{D}\right)$ وبالتالي:

$$a^2+Db^2=2ab\sqrt{D}=2x_1+2y_1\sqrt{D}$$

ومنه نجد أن:

$$\left.\begin{aligned}a^2+Db^2&=2x_1\\2ab&=2y_1\end{aligned}\right\}\quad (III)$$

وبالتالي فإن:

$$x_1^2-Dy_1^2=\left(\frac{a^2+Db^2}{2}\right)^2-D(ab)^2$$
$$=\left(\frac{a^4+2Da^2b^2+D^2b^4}{4}\right)-Da^2b^2=\frac{(a^2-Db^2)^2}{4}$$

ومنه نجد أن: (IV) $(a^2-Db^2)^2=4(\chi_1^2-Dy_1^2)=4$

من (IV) و(III) نجد أن $a^2 - Db^2, a^2 + Db^2 \in \mathbb{Z}$ وعليه فإن: $2a^2 = a^2 - Db^2 + a^2 + Db^2 \in \mathbb{Z}$ وبالتالي فإن $a \in \mathbb{Z}$ وعليه فإن: $Db^2 = a^2 - (a^2 - Db^2) \in \mathbb{Z}$ وبالتالي فإن $b \in \mathbb{Z}$ لأن D عدد صحيح موجب حر من التربيع.

مما سبق نجد أن:

$$\frac{w}{\beta^t} = a + b\sqrt{D} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

سنبرهن الآن أن $(, b)$ حل للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$:

بما أن $\frac{w}{\beta^t} = a + \sqrt{D}$ حيث $a, b \in \mathbb{Z}$ فإن:

$$a^2 - Db^2 = N\left(\frac{w}{\beta^t}\right) = \frac{N(w)}{N(\beta^t)} = \frac{K^2 - DL^2}{\left(x_1^2 - Dy_1^2\right)^t} = \frac{2}{1^t} = 2$$

ومنه بحسب العلاقة (III) يكون $ab = y_1 > 0$ إذا و فقط إذا كان $a > 0$ وَ $b > 0$ أو $a < 0$ وَ $b < 0$.

(1) إذا كان $a > 0$ وَ $b > 0$ عندئذٍ بحسب ما سبق فإن (a, b) حل موجب للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ ومنه من الفرض أن w الحل الأساسي للمعادلة

(2) $X^2 - DY^2 = 2$ فإن $w \leq \frac{w}{\beta^t}$ وبالتالي $\beta^t \leq 1$ وهذا غير ممكن لأن

(3) $\beta^t > 1$. إذاً الفرض الجدلي أن $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$ ليس الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$ خاطئ، إذاً $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$ في هذه الحالة.

(4) إذا كان $a < 0$ وَ $b < 0$ فإن $(-a, -b)$ يكون حل موجب و بالتالي فإن $w \leq \frac{-w}{\beta^t}$ حيث $\frac{-w}{\beta^t} = -a - b\sqrt{D}$ وبالتالي $\beta^t \leq -1$ وهذا مرفوض.

من الحالتين السابقتين حصلنا على تناقض و بالتالي الفرض الجدلي خاطئ إذاً $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$.

ملاحظة:

في المبرهنة السابقة أثبتنا أن $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$ حيث $D > 2$ ، بقي لدينا حالة $D = 2$.

تمهيدية 2:

ليكن (K, L) الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - 2Y^2 = 2$ عندئذٍ: $\left(\frac{K^2+2L^2}{2}, KL\right)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - 2Y^2 = 1$.

البرهان:

بما أن الحل الموجب $(,Y)$ للمعادلة $X^2 - DY^2 = N$ يكون الحل الأساسي لهذه المعادلة إذا كان X هو القيمة الموافقة لأصغر قيمة موجبة لـ Y تجعل المقدار $DY^2 + N$ مربعاً كاملاً، فإن $(K, L) = (2,1)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - 2Y^2 = 2$ كما أن $(3,2)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - 2Y^2 = 1$، و نلاحظ أن:

$$\left(\frac{K^2+2L^2}{2}, KL\right) = (3,2)$$

إذاً $\left(\frac{K^2+2L^2}{2}, KL\right)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - 2Y^2 = 1$.

مما سبق نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1:

إذا كان (K, L) الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ عندئذٍ: $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$.

البرهان:

ينتج مباشرة من التمهيديتين (1) وَ (2).

المبرهنة الآتية نعطي فيها صيغتين تعاوديتين جديدتين للحلول (x_n, y_n) لمعادلة بِل.

مبرهنة 2:

ليكن (a, b) الحل الأساسي لمعادلة بِل $X^2 - DY^2 = 1$، إن الحلول (x_n, y_n) للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ تعطى بالعلاقتين التعاوديتين:

$$X_n = 2aX_{n-1} - X_{n-2}$$
$$Y_n = 2aY_{n-1} - Y_{n-2}$$

من أجل كل$n \geq 3$.

البرهان:

أولاً: نبرهن أن $X_n = 2aX_{n-1} - X_{n-2}$ من أجل كل $n \geq 3$، بالاعتماد على العلاقة (*):

$$X_n = aX_{n-1} + bDY_{n-1} = aX_{n-1} + bD\left(bX_{n-2} + aY_{n-2}\right)$$

$$X_n = aX_{n-1} + b^2DX_{n-2} + abDY_{n-2}$$

لكن $a^2 - Db^2 = 1 \Leftarrow b^2D = a^2 - 1$، نعوض في X_n فنجد:

$$X_n = aX_{n-1} + (a^2 - 1)X_{n-2} + abDY_{n-2}$$

$$X_n = aX_{n-1} + a^2X_{n-2} + abDY_{n-2} - X_{n-2}$$

$$X_n = aX_{n-1} + a(aX_{n-2} + bDY_{n-2}) - X_{n-2}$$

$$X_n = aX_{n-1} + aX_{n-1} - X_{n-2}$$

$$X_n = 2aX_{n-1} - X_{n-2}$$

ثانياً: نبرهن أن $Y_n = 2aY_{n-1} - Y_{n-2}$ من أجل كل $n \geq 3$.

$$Y_n = bX_{n-1} + aY_{n-1} = b\left(aX_{n-2} + bDY_{n-2}\right) + aY_{n-1}$$
$$Y_n = abX_{n-2} + b^2DY_{n-2} + aY_{n-1}$$

ولدينا: $b^2D = a^2 - 1 \Leftarrow$

$$Y_n = abX_{n-2} + (a^2 - 1)Y_{n-2} + aY_{n-1}$$
$$Y_n = abX_{n-2} + a^2Y_{n-2} + aY_{n-1} - Y_{n-2}$$
$$Y_n = a(bX_{n-2} + aY_{n-2}) + aY_{n-1} - Y_{n-2}$$
$$Y_n = aY_{n-1} + aY_{n-1} - Y_{n-2}$$
$$Y_n = 2aY_{n-1} - Y_{n-2}$$

مبرهنة 3:

ليكن $(,L)$ الحل الأساسي لمعادلة بِل $X^2 - DY^2 = 2$، عندئذٍ تعطى الحلول الأخرى (X_n, Y_n) لهذه المعادلة بالعلاقتين:

$$X_n = (2K^2 - 1)(X_{n-1} - X_{n-2}) + X_{n-3}$$
$$Y_n = (2K^2 - 1)(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + Y_{n-3}$$

من أجل كل$4 \geq n$.

البرهان:

ليكن (a,b) الحل الأساسي لمعادلة بِل $x^2 - Dy^2 = 1$ عندئذٍ فإن الحلول (x_n, y_n) للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ تعطى بالعلاقتين:

$\begin{cases} X_n = 2aX_{n-1} - X_{n-2} \\ Y_n = 2aY_{n-1} - Y_{n-2} \end{cases}$ من أجل $n \geq 3$.

أولاً: نبرهن أن: $X_n = \left(2K^2 - 1\right)\left(X_{n-1} - X_{n-2}\right) + X_{n-3}$

من أجل $4 \leq n$.

$$X_n = X_n - X_{n-1} + X_{n-1}$$
$$X_n = 2aX_{n-1} - X_{n-2} - \left(2aX_{n-2} - X_{n-3}\right) + X_{n-1}$$
$$X_n = 2aX_{n-1} - X_{n-2} - 2aX_{n-2} + X_{n-3} + X_{n-1}$$
$$X_n = 2aX_{n-1} - 2aX_{n-2} + X_{n-1} - X_{n-2} + X_{n-3}$$
$$X_n = 2a\left(X_{n-1} - X_{n-2}\right) + \left(X_{n-1} - X_{n-2}\right) + X_{n-3}$$
$$X_n = \left(2a+1\right)\left(X_{n-1} - X_{n-2}\right) + X_{n-3}$$

لكن وجدنا في المبرهنة (1) أن $\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right)....(I)$ هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$ و من جهة ثانية بما أن (K,L) هو الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ نجد أن $K^2 - DL^2 = 2$ و بالتالي $DL^2 = K^2 - 2$، نعوض في الحل الأساسي (I)، فنجد:

$$\left(\frac{K^2+DL^2}{2}, KL\right) = \left(K^2 - 1, KL\right)$$

و منه حسب المبرهنة (2) و باعتبار أن الحل الأساسي وحيد نجد أن $a = K^2 - 1$ بالتعويض يكون :

$$X_n = \left(2K^2 - 1\right)\left(X_{n-1} - X_{n-2}\right) + X_{n-3}$$

ثانياً: نبرهن أن $Y_n = \left(2K^2 - 1\right)\left(Y_{n-1} - Y_{n-2}\right) + Y_{n-3}$ من أجل $n \geq 4$.

$$Y_n = Y_n - Y_{n-1} + Y_{n-1}$$

$$Y_n = \left(2aY_{n-1} - Y_{n-2}\right) - \left(2aY_{n-2} - Y_{n-3}\right) + Y_{n-1}$$

$$Y_n = 2aY_{n-1} - Y_{n-2} - 2aY_{n-2} + Y_{n-3} + Y_{n-1}$$

$$Y_n = 2aY_{n-1} - 2aY_{n-2} + Y_{n-1} - Y_{n-2} + Y_{n-3}$$

$$Y_n = 2a\left(Y_{n-1} - Y_{n-2}\right) + \left(Y_{n-1} - Y_{n-2}\right) + Y_{n-3}$$

$$Y_n = \left(2a + 1\right)\left(Y_{n-1} - Y_{n-2}\right) + Y_{n-3}$$

نعوض $a = K^2 - 1$، فنجد:

$$Y_n = \left(2K^2 - 1\right)\left(Y_{n-1} - Y_{n-2}\right) + Y_{n-3}$$

الاستنتاجات و التوصيات:

إن دراسة العلاقة بين الحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 2$ والحل الأساسي للمعادلة $X^2 - DY^2 = 1$ والنتائج التي تم التوصل إليها في هذا البحث تعتبر في غاية الأهمية في دراسة بعض المسائل الأخرى المتعلقة بالمعادلة $X^2 - DY^2 = N$ من أجل قيم محدودة لِ N والتي لم يُحل منها حتى الآن إلا القليل.

المراجع:

[1] Kaplan,P., 1996. Pells equations $X^2 - DY^2 = -1, -4$ and continued fraction, Journal of number theory,V.3, pp. 169-182.

[2] Mollin,R.A., 2001. A Simple criterion for solvability of both equations $X^2 - DY^2 = \pm C$,New York, J. Math, V7,87-97.

[3] Robertson, J. P., 2004. Solving the generalized Pell equation $X^2 - DY^2 = N$, Copyright, 1-26.

[4] Robertson, J. P., 2014. Fundamental Solutions to generalized Pell equations $X^2 - DY^2 = N$, 1-26.

[5] Rose, H.E.,1988. A course in number theory, Clarendom Press.

[6] Teckan,A., Gezer,B., and Bizim,O., 2007. On the integer solutions of the Pell equation $X^2 - DY^2 = 2^t$,International Journal of computational and mathematical science 1:3, pp. 204-208.

[7] Teckan, A., 2004. Pell equation $X^2 - DY^2 = 2$ .II.Irish math. Soc. Bulletin, V.54, pp 73-89.