استخدام قواعد Groebner وبُعد Krull ودالة Homotopy في حساب البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة

د. شوقي محمد الراشد*

الملخص

حساب البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة منها محسوبة بشكل تقريبي يعتمد على حساب البُعد الأكبر للمركبات غير المختزلة للمجموعة الجبرية التي تحوي هذه النقطة. اِعتماداً على بعض المبرهنات والخواص في الهندسة الجبرية والجبر التبادلي نعرض تحسيناً لطريقتي (خوارزميتي) حساب البُعد المحلي في [2] و[5]، وذلك بعدد خطوات أقل في استخدام دالة الـ Homotopy عن ما هو في [5] من خلال البدء بعدد أقل من عدد المتغيرات، ودون الحاجة إلى مفهومي Triangular set و Witness Point Sets وخاصة الاستمرار في دالة الـ $Homotopy$ كما في [2].

الكلمات المفتاحية: البُعد المحلي، المجموعة الجبرية، بُعد $Krull$، قواعد $Groebner$ ، الشكل التربيعي ، دالة الـ $Homotopy$.

التصنيف الرياضياتي (**2010**) **AMS** : 14A20 .

* أستاذ مشارك في الجامعة العربية الدولية الخاصة AIU، عضو هيئة تدريسية في جامعة دمشق.

Use Groebner's Bases, Krull's dimension, and Homotopy functions to compute local Dimension of an Algebraic Set at a Point

Dr. Shawki M. AL Rashed*

Abstract

The computation of the local dimension of an algebraic set at a numerical approximation to a point on it depends on the computation of the maximum dimension of irreducible components of the algebraic set, which pass through this point. Depending on some theorems and properties in the algebraic geometry and in commutative algebra we modified the algorithms in [2] and in [5] to compute local dimension by using less steps of Homotopy functions than it is in [5] by starting at a number less than the number of the variables and without the use of the concepts "Triangular Set" , Witness Point Sets, and the continuation of the Homotopy function as in [2].

Keywords: local dimension, algebraic set, Krull's dimension, Groebner Bases, square form, Homotopy function.

Mathematical Classify AMS (2010): 14A20

*Associate Professor at Arab International University AIU, Academic Staff at Damascus University.

1. مقدمة:

إن الكثير من العلوم التطبيقية تهتم بتحديد الفضاءات التي توجد بها نقاط معينة (محسوبة عددياً بطرق تقريبية)، والتي تمثل أصفار كثيرات حدود من أجل تسهيل دراسة بعض الخواص لهذه النقاط، مثلاً الدراسة في جوار نقطة موجودة في فضاء ثنائي (المستوي) أسهل من الدراسة في جوار النقطة في بعد ثلاثي، وهذا ما يحدده البُعد المحلي لمجموعة جبرية عند نقطة منها.

بداية نعرض بعض التعاريف والخصائص اللازمة في هذا البحث [3,6,8,10,11].

لتكن $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots\dots, x_N]$ حلقة كثيرات الحدود ذات N متغير والمعرّفة على حقل الأعداد العقدية (المركبة) $\mathbb{C}$، و $F = \{f_1, f_2, \dots\dots, f_n\} \subseteq R$ مجموعة مؤلفة من n كثير حدود . يُعرّف المثالي المولّد بهذه المجموعة بالشكل

$$I = < F > = < f_1, f_2, \dots \ , f_n > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i f_i \ : \ g_i \in R \right\}$$

تُعرّف المجموعة الجبرية المُعرفة بالمثالي I على أنها مجموعة جزئية من $\mathbb{C}^N$ والمكونة من أصفار كثيرات الحدود في المثالي I ، وتُرمز بـ :

$$V(I) = V < F > = V < f_1, f_2, \dots \ , f_n > =$$
$$= \{ p = (p_1, p_2, \dots \ , p_N) \in \mathbb{C}^N : f(p) = 0 , \forall f \in I \}$$

إن بُعد المجموعة الجبرية في الفضاء $\mathbb{C}^N$ هو ذاته بُعد المثالي الذي يُعرف هذه المجموعة، وأحد الطرق الجبرية المستخدمة من أجل تعريف البُعد هو بُعد $Krull$ للحلقة $[11, page\ 35 + 205]$.

تعريف: ليكن I مثالياً في حلقة كثيرات الحدود $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots\dots, x_N]$ ذات N متغير و المعرّفة على حقل الأعداد العقدية (المركبة) $\mathbb{C}$. إن العدد غير السالب

$$n := Sup\{ k : P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \dots\dots \subsetneq P_k : P_i \in Spec(R) , 0 \le i \le k\}$$

يُسمى بُعد $Krull$ للحلقة R ويُرمز بـ $\dim(R)$، حيث $Spec(R)$ مجموعة كل المثاليات الأولية في الحلقة R.

وبُعد المثالي I يُعرف على أنه بُعد حلقة القسمة $\frac{R}{I}$ أي أن $\dim(I) = \dim\left(\frac{R}{I}\right)$.
عندئذٍ يكون $\dim(X) = \dim(I)$، حيث $X = V(I) \subseteq \mathbb{C}^N$ المجموعة الجبرية المولَدة بالمثالي I .

إن المجموعة الجبرية X تُحلل إلى مجموعات جبرية X_i حيث $0 \leq i \leq \dim(X)$، والتي بدورها X_i تُحلل إلى مجموعات (مركبات) غير قابلة للاختزال X_{ij} حيث $\dim(X_{ij}) = i$. أي أن
$X = \bigcup_{i=0}^{d} X_i = \bigcup_{i=0}^{d}\left(\bigcup_{j=1}^{d_i} X_{ij})\right)$، حيث X_{ij} مجموعة خالية أو مجموعة جبرية غير قابلة للاختزال بُعدها i في الفضاء $\mathbb{C}^N$.

ويسمى هذا التحليل $X = \bigcup_{i=0}^{d} X_i = \bigcup_{i=0}^{d}\left(\bigcup_{j=1}^{d_i} X_{ij})\right)$ التحليل الجبري المختزل للمجموعة الجبرية X .

يُعرف البعد المحلي "local dimension" لمجموعة جبرية X عند نقطة $p \in X$ على أنه بعد المركبة ذات البعد الأكبر التي تنتمي إليها هذه النقطة ويرمز لها بـ $\dim_p X$، أي

$$\dim_p(X) = \sup\left\{i : \quad i = dim(X_{ij}), p \in X_{ij}, X = \bigcup_{i=0}^{d}\left(\bigcup_{j=1}^{d_i} X_{ij})\right)\right\}$$

مثال: $R = \mathbb{R}[x,y,z]$ ، $I =< f_1 , f_2 >$ ، حيث $f_1 = xz , f_2 = yz$. عندئذٍ: $I =< x,y > \cap < z >$ والمجموعة الجبرية $X = V(I) = \bigcup_{i=0}^{2} X_i$ المولّدة بالمثالي I تُحلل إلى مجموعات جبرية $X_2 = V(< z >)$ مركبة غير قابلة للاختزال بُعدها 2 (تمثل المستوي oxy في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$) ومجموعة جبرية $X_1 = V(< x,y >)$ مركبة غير قابلة للاختزال بُعدها 1 (تمثل المحور oz في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$)، و $X_0 = \emptyset$ المجموعة الخالية. البعد المحلي للمجموعة الجبرية X عند النقطة $p = (1,2,0)$ هو $\dim_p(X) = 2$ ، وذلك لأن $p \in X_2$.

2. **دالة الـ *Homotopy***: نعرض تعريف دالة الـ ***Homotopy*** وكيفية استخدامها من أجل إيجاد أصفار كثيرات حدود، وتتطلب هذه الطريقة إلى أن يكون البدء بكثيرات حدود أصفارها معلومة بالإضافة إلى أن يكون عدد كثيرات الحدود مساوياً عدد المتغيرات، حيث أنها تعتمد على طرق عددية في إيجاد أصفار كثيرات حدود غير خطية.

سنعرض هذه الطريقة بشكل مختصر، ومن أجل تفاصيل أكثر يمكن الرجوع إلى [4,7,12,15,16,17,18,19] .

- لتكن $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ . \\ . \\ f_N(x) \end{pmatrix}$ جملة كثيرات حدود في الحلقة $R = \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, x_2 , \dots , x_N]$.
- نعرف نظام البدء: جملة كثيرات حدود $G(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ . \\ . \\ g_N(x) \end{pmatrix}$ في الحلقة $R = \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, x_2 , \dots , x_N]$ ، حيث تكون مجموعة أصفارها S_0 معلومة (حساب أصفار $G(x)$ سهل) وتدعى مجموعة البدء، ويتحقق $\deg(g_i) = \deg(f_i)$ كي يكون عدد أصفار f_i مساوياً لعدد أصفار g_i من أجل إيجاد جميع الأصفار.
- نُعرف دالة *"Homotopy"* :

$$H: \mathbb{C}^N \times [0, 1] \to \mathbb{C}^N$$

$$\forall\ (x, t) \in \mathbb{C}^N \times [0, 1]\ :\ H(x, t) = (1 - t)F(x) + tG(x)$$

عندما $t: 1 \to 0$ تأخذ القيم من العدد $t = 1$ إلى $t = 0$، فإن الدالة $H(x, t)$ تُعرف مسارات $x(t)$ والتي تحقق معادلة "Davidenko":

$$0 = \frac{d\,H(x,t)}{d\,t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial x_i}\,\frac{\partial x_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

- كل نقطة بدء $x_0 \in S_0$ تبدأ بالمسار $C(x(t),t) \in H^{-1}(0)$ من نقطة البدء $(x_0,1)$ والتي تحقق $H(x_0\,,1) = G(x_0) = 0$ إلى نقطة نهاية $(x_1,0)$ عندما $t : 0 \to 1$، حيث أن $x_1 \in \mathbb{C}^N$ تمثل حلاً لـ $F(x) = 0$.

إن خوارزمية الـ *Homotopy* تُستخدم في إيجاد أصفار الجملة $F(x)$ اِنطلاقاً من جملة بدء $G(x)$، وهي منفذة في نظام جبر الكمبيوتر *"Bertini"* (*[4]*).

(إن الضامن (الإثبات النظري) لإيجاد أصفار كثيرات الحدود $F(x)$ هو تطبيق البند الخامس من المبرهنة (*1.3.1*) صفحة 9 والتمهيدية (*1.3.1*) صفحة 10 في *[2]* و [14]) .

2.1. مثال: لتكن $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ مجموعة من كثيرات الحدود في الحلقة $R = \mathbb{C}[x\,,y]$ ، حيث $f_1 = (y-x+1)(x-1)$ و $f_2 = (y-x+1)(y-2)$.

نُعرف نظام بدء $G(x) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ من كثيرات الحدود في الحلقة $R = \mathbb{C}[x\,,y]$، حيث $g_1 = x^2 - 1$ و $g_2 = y^2 - 1$، وتكون مجموعة أصفارها $S_0 = \{(1,1),(-1,1\,),(1,-1),(-1,-1)\}$ تشكل مجموعة البدء.

إن دالة الـ " *Homptopy* " : $H{:}\,\mathbb{C}^2 \times [0,1] \to \mathbb{C}^2$,

$$\forall\,\big((x,y),t\big) \in \mathbb{C}^N \times [0,1]\ :\ H\big((x,y),t\big) = (1-t)F(x,y) + tG(x,y)$$

حيث $H\big((x,y),0\big) = F(x,y)$ و $H\big((x,y),\ 1\big) = G(x,y)$.

عندما $t{:}\ 1 \to 0$ نحصل على $S_1 = \{(1,2),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),(3,2)\}$ مجموعة أصفار[1] $F(x,y)$.

[1] تم استخدام نظام جبر الكمبيوتر Bertini في الحساب وتوليد المسارات من مجموعة بدء الى S_1.

في الحالة العامة، n عدد كثيرات الحدود في الجملة $F(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ .\\ .\\ f_n(x)\end{pmatrix}$ لا يساوي عدد المتغيرات N، لذلك نعرض خوارزمية تنقل مجموعة كثيرات الحدود $F(x)$ المكونة من n كثيرة حدود إلى جملة كثيرات حدود أخرى يكون عددها N مساوياً لعدد المتغيرات [2,14,15,16,17]، من خلال اختيار مصفوفة بشكل عشوائي $\Lambda \in M_{N\times n}(\mathbb{C})$ ذات المرتبة $N\times n$ و مُعرّفة على $\mathbb{C}$. من أجل اختيار هذه المصفوفة نميز الحالات التالية[2] :

1. إذا كان $N=n$ ، فإنه يتم اختيار المصفوفة $\Lambda = I_N$ المصفوفة الواحدية.
2. إذا كان $N<n$ ، نجزئ المصفوفة Λ إلى مصفوفتين $\Lambda = (\Lambda_1 \;\; \Lambda_2)$ حيث $\Lambda_1 \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$ و $\Lambda_2 \in M_{N\times (n-N)}(\mathbb{C})$. عندئذٍ:

$$\Lambda_1^{-1}.\Lambda.F(x) = \Lambda_1^{-1}\left(\Lambda_1 \;\; \Lambda_2\right)F(x) = \Lambda_1^{-1}\left(\Lambda_1 \;\; \Lambda_2\right)\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ .\\ .\\ f_n(x)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ .\\ .\\ f_N(x)\end{pmatrix} + \Lambda_1^{-1}.\Lambda_2\begin{pmatrix} f_{N+1}(x)\\ f_{N+2}(x)\\ .\\ .\\ f_n(x)\end{pmatrix} = (I_N \;\; \Gamma)F(x)$$

حيث $\Gamma = \Lambda_1^{-1}.\Lambda_2 \in M_{N\times (n-N)}(\mathbb{C})$.

3. إذا كان $N>n$ ، فإنه يتم تجزئة المصفوفة Λ إلى مصفوفتين $\Lambda_1 \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ و $\Lambda_2 \in M_{(N-n)\times n}(\mathbb{C})$. نعرف مصفوفة مربعة

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1} & 0_{n\times (N-n)} \\ -\Lambda_2 .\Lambda_1^{-1} & I_{N-n}\end{pmatrix} \in M_{N\times N}(\mathbb{C})$$ ، نضع

[2] هذه الخوارزمية منفذة في نظام جبر الكمبيوتر SINGULAR .

$$\Gamma.\Lambda.F(x)=\begin{pmatrix}\Lambda_1^{-1} & 0_{n\times(N-n)}\\ -\Lambda_2.\Lambda_1^{-1} & I_{N-n}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{N\times 1}\\ 0_{(N-1)\times 1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n(x)\\ \\ 0_{(N-1)\times 1}\end{pmatrix}$$

أي نضع $f_i = 0$ من أجل $n < i \leq N$.

إن العلاقة بين المركبات المختزلة للمجموعة الجبرية $X = V(F)$ والمركبات المختزلة للمجموعة الجبرية $Y = V(\Lambda.F)$ كالآتي: إن للمجموعتين الجبريتين X و Y لهما نفس المركبات المختزلة ذات البعد الموجب، والمركبات المختزلة لـ X ذات البعد صفر محتواة في مجموعة المركبات المختزلة ذات البعد صفر لـ Y.(*[1,2,13,14, 18]*).

وهذا ما تبيّنه المبرهنة التالية.

2.2. مبرهنة [1,13,14,15]: لتكن $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots\dots, x_N]$ حلقة كثيرات الحدود معرّفة على حقل الأعداد العقدية (المركبة) $\mathbb{C}$، و $F = \{f_1, f_2, \dots\dots, f_n\} \subseteq R$ مجموعة مؤلفة من n كثيرات حدود، $X \subseteq \mathbb{C}^N$ مجموعة جبرية مختزلة. عندئذٍ توجد مجموعة غير خالية مفتوحة $U \subseteq \mathbb{C}^{k\times N}$ $(Zariski\ open)$ من المصفوفات $\Lambda \in M_{k\times N}(\mathbb{C})$ التي تحقق:

i. إذا كان $\dim(X) > N - k$ ، فإن X مركبة مختزلة للمجموعة الجبرية $V(F)$ إذا و فقط إذا كانت X مركبة مختزلة للمجموعة الجبرية $V(\Lambda F)$،

ii. إذا كان $\dim(X) = N - k$، وكانت X مركبة مختزلة للمجموعة الجبرية $V(F)$ ، فإن X مركبة مختزلة للمجموعة الجبرية $V(\Lambda F)$.

2.3. مثال: لتكن $F(x,y)=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ مجموعة من كثيرات الحدود في الحلقة $R=\mathbb{C}[x\,,y]$، حيث $f_1=(y+x+1)(x-1)$ و $f_2=xy(x-1)$ و $f_3=(x-1)y$.

إن المجموعة الجبرية X المّولدة بـ $F(x,y)$ تُحلل إلى $X=V(F)=X_1\cup X_0$ حيث $X_1=V(<x-1>)$ مركبة مختزلة بُعدها 1، و $X_0=V(<x+1,y>)$ مركبة مختزلة بُعدها يساوي 0. في هذا المثال $N=2<n=3$ ، لذلك نختار مثلاً $\Gamma=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ومنه

$$\boldsymbol{\Lambda}.\ \boldsymbol{F(x,y)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{(y+x+1)(x-1)}\\ \boldsymbol{xy(x-1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{2}\end{pmatrix}\boldsymbol{((x-1)y)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{(2y+x+1)(x-1)}\\ \boldsymbol{y(x+2)(x-1)}\end{pmatrix}$$

إن المجموعة الجبرية Y المّولدة بـ $\Lambda.F(x,y)$ تُحلل إلى $Y=V(\Lambda.F)=Y_1\cup Y_0$ حيث $Y_1=V(<x-1>)$ مركبة مختزلة بُعدها 1، و $Y_0=Y_{01}\cup Y_{02}$ اجتماع لمركبتين مختزلتين بُعد كلاً منهما يساوي 0، حيث $Y_{02}=V(<x+1,y>)$ و $Y_{01}=V(<x+2,\ 2y-1>)$ ، نلاحظ أن $X_1=Y_1$ و $X_0=Y_{02}$.

3. **قاعدة "*Groebner*"** : العديد من التطبيقات لقواعد *Groebner* في الجبر التبادلي والهندسة الجبرية ونظرية الشواذ، في هذا البحث سنستخدم أحد التطبيقات وهو إيجاد بُعد المجموعة الجبرية [6,8,9,11].

لتكن $>$ علاقة ترتيب على مجموعة الحدوديات $Mon(R)=\{x^\alpha\ :\ \alpha\in\mathbb{N}^N\}$ و $f=a_\alpha x^\alpha+a_\beta x^\beta+a_\gamma x^\gamma+\cdots\ldots+a_\delta x^\delta\in R$ مجموع منتهي من الحدوديات غير الصفرية و التي تُكتب بشكل وحيد بالنسبة لعلاقة الترتيب $>$ ، حيث:

$$x^\alpha>x^\beta>x^\gamma>\cdots\ldots>x^\delta \text{ و } R=\mathbb{C}[x_1\,,x_2\,,\ldots.\ ,x_N]$$

و $\alpha=(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\ldots.\ ,\alpha_N)\in\mathbb{N}^N$ و $x^\alpha=\ x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\,,\ldots.x_N^{\alpha_N}$

و $a_\alpha,a_\beta,a_\gamma,\ldots\ldots,a_\delta\in\mathbb{C}$.

- إن علاقة الترتيب $>$ شاملة "$Global$" إذا و فقط إذا كان $1 < x^{\alpha}$ أياً كان $(0,0,\dots,0) \neq \alpha \in \mathbb{N}^N$.
- إن الحد القائد لـ f "$leading\ term$" يرمز بـ $LT(f) = a_{\alpha}x^{\alpha}$.

تعريف : ليكن $I =< F >$ مثالي مولد بمجموعة كثيرات الحدود $F = \{f_1, f_2, \dots , f_n\}$ في حلقة كثيرات الحدود $R = \mathbb{C}[x_1 , x_2 , \dots , x_N]$، و $\emptyset \neq G = \{g_1 , g_2 , \dots , g_l\} \subseteq I$ و $>$ علاقة ترتيب شاملة .

- إن مجموعة كل الحدود القائدة لعناصر المثالي I تولد مثالي في الحلقة R يُرمز بـ $LT(I)$ ، أي

$$LT(I) = \{LT(f):\ f \in I\}$$

- المجموعة المنتهية G تسمى قاعدة $Groebner$ (أو قاعدة قياسية "standard basis") للمثالي I إذا وفقط إذا كان

$$LT(I) =< LT(g_1), LT(g_2) ,\ \dots\dots , LT(g_l) >$$

العلاقة بين المثالي وقاعدته القياسية تُعرض من خلال ("$Buchberger's Criterion$") [6,8,9,11] والتي تبيّن بأن المثالي موّلد بهذه القاعدة والتي تكون مجموعة أصغرية بالنسبة إلى علاقة الترتيب $>$، أي أنه إذا كانت G قاعدة قياسية للمثالي I، فإن $I =< G >$ حيث G أصغر مجموعة جزئية في I (بالنسبة إلى علاقة الترتيب) تولد المثالي I.

إن خوارزمية حسابها منفذة في نظام جبر الكمبيوتر $SINGULAR$ [8] ونعرض مثال في هذا النظام من خلال حساب قاعدة $Groebner$ إيجاد بُعد المجموعة الجبرية $X = V(I)$.

3.1. مثال: ليكن $\boldsymbol{I =< f_1 , f_2, f_3 >}$ مثالي في $\boldsymbol{R = \mathbb{C}[x, y, z]}$ و $\boldsymbol{X = V(I)}$ المجموعة الجبرية المولدة بـ $\boldsymbol{I}$ ، حيث $\boldsymbol{f_1 = (x^3 + z)(x^2 - y)}$ ، $\boldsymbol{f_2 = (x^3 + y)(x^2 - z)}$ و $\boldsymbol{f_3 = (x^3 + z)(x^3 + y)(z^2 - y)}$.
حساب قاعدة $Groebner$ للمثالي I و بُعد المجموعة الجبرية $X = V(I)$.

ring r=0, (x,y,z),dp;
Poly $\boldsymbol{f_1} = (\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{z})(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{y})$;
Poly $\boldsymbol{f_2} = (\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{z})$;
Poly $\boldsymbol{f_3} = (\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{z})(\boldsymbol{x^3} + \boldsymbol{y})(\boldsymbol{z^2} - \boldsymbol{y})$;
Ideal $I = f_1, f_2, f_3$;
Ideal $= st(I)$;
===>

$J[1] = xy^2z - xyz^2 + y^2z - yz^2$
$J[2] = x^2y^2 - x^2z^2 - x^2y + x^2z - y^2z + yz^2$
$J[3] = x^3y - x^3z + x^2y - x^2z$
$J[4] = y^3z^2 - y^2z^3 - y^3z + yz^3 + y^2z - yz^2$
$J[5] = x^2yz^2 - x^2z^3 - x^2yz + x^2z^2 - y^2z^2 + yz^3 + y^2z - yz^2$
$J[6] = x^5 - x^3z + x^2y - yz$
$J[7] = x^3z^4 - 2x^3z^3 + x^3z^2 + yz^4 - 2yz^3 + yz^2$
$J[8] = x^4z^3 - x^4z^2 + x^3z^3 - x^3z^2 + xyz^3 - xyz^2 + yz^3 - yz^2$
dim(G);
===> 1

4. **الخوارزمية:** الكثير من الأمثلة التطبيقية يكون بُعد المجموعة الجبرية أصغر من عدد المتغيرات. إن الخوارزمية التي سنعرضها في هذا البحث تبدأ من $d = \dim(X)$ بعد المجموعة الجبرية، بينما الخوارزمية في [5] تبدأ من N عدد المتغيرات معتمدة فقط على دالة الـ *"Homptopy"* والخوارزمية في [2] تعتمد على مفهوم $"Witness\ point\ super\ sets"$ و*"triangular sets"* التحليل العددي المختزل للمجموعات الجبرية والقواعد القياسية وعلى صفة الاستمرارية في دالة الـ *"Homptopy"* .

نعرض خوارزمية تبدأ من بُعد المجموعة الجبرية من خلال إجراء تقاطع للمجموعة الجبرية X مع فضاء خطي L يحوي النقطة $p \in \mathbb{C}^N$ المراد حساب البعد المحلي عندها باستخدام القواعد القياسية و دالة الـ *"Homptopy"*.

إن فكرة التقاطع مبنية على أن الفضاء L_d الذي بعده $N - d$ يتقاطع مع المركبات ذات البعد d في عدد منتهٍ من النقاط ولن يتقاطع مع أي مركبة أخرى بعدها أصغر

من d ، والفضاء L_{d-1} الذي بُعده $N-(d-1)$ يتقاطع مع المركبات ذات البعد $d-1$ في عدد منتهٍ من النقاط و لن يتقاطع مع أي مركبة أخرى بعدها أصغر من $d-1$ وهكذا. حيث أن $\mathbb{C}=L_0 \supseteq L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \ldots . \supseteq L_d$ وكلاً منها معرف بالشكل $L_i = V(< A_i.(x-p) >)$ و $A_i \in M_{i\times N}(\mathbb{C})$.

4.1 مبرهنة [2,14,15] : لتكن $X = \cup X_i \subseteq \mathbb{C}^N$ اجتماع منتهي لمجموعات جبرية بُعد كلاً منها k . عندئذٍ يوجد مجموعة مفتوحة (" dense Zariski open") تحوي فضاءات خطية $L \subseteq \mathbb{C}^N$ ذات بُعد m تحقق:

1) إذا كان $k+m \geq N$ فإن المجموعة الجبرية $L \cap X$ ذات بُعد $k+m-N$ ،
2) إذا كان $k+m < N$ فإن المجموعة الجبرية $L \cap X$ تساوي المجموعة الخالية $\emptyset$.

<u>الخوارزمية:</u>

- <u>الدخل</u>: مثالي $I =< \grave{F} > \subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2 , \ldots. , x_N]$ مولّد بجملة كثيرات حدود $\grave{F} = \{\grave{f_1}, \grave{f_2}, \ldots, \grave{f_n}\}$ المُعرّفة على حقل الأعداد $\mathbb{C}$ ،

النقطة $p = (p_1, p_2 , \ldots.., p_N) \in X = V(I)$ المراد حساب البعد المحلي عندها.

- <u>الخرج</u>: $dim_p(X)$ البُعد المحلي للمجموعة الجبرية المُعرفة بالمثالي I عند النقطة p .
- <u>الإجرائية</u>:

1) استخدام قاعدة $"Groebenr"$ من أجل حساب العدد $d = dim(X)$ ،
إذا كان $d=0$ ، فإن $dim_p(X) = 0$ ، و في حالة $d \neq 0$ نتابع،

2) من أجل $0 < i \leq d$، (نبدأ من d بشكل تنازلي وهذا له علاقة بالإثبات النظري للخوارزمية)،

i. نُعرف الفضاء الخطي L_i الذي بعده $N-i$ بالمعادلات الخطية $A_i(x-p) =$ $\{l_1, l_2, \ldots\ldots, l_i\}$، حيث $A_i \in M_{i\times N}(\mathbb{C})$ مصفوفة اختيارية و $x =$

$(x_1, x_2, \ldots, x_N)$، أي أن $L_i = V(l_1, l_2, \ldots, l_i)$ المجموعة الجبرية المولدة بـ $\{l_1, l_2, \ldots, l_i\}$ ،

.ii اختزال الجملة $\{\hat{f_1}, \hat{f_2}, \ldots, \hat{f_n}, l_1, l_2, \ldots, l_i\}$ إلى الشكل التربيعي $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ (وفق الخوارزمية المذكورة سابقاً) ،

إن الفضاء الخطي L_i يتقاطع مع المركبة الجبرية X_i بعدد منتهٍ من النقاط ، يُعطى بـ

$S_i = X_i \cap L_i = V(f_1, f_2, \ldots, f_N)$ ،

.iii استخدام دالة الـ "$Homotopy$" :

$$H_i(x,t) = (1-t)F + tG_i = (1-t)\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ . \\ . \\ f_N(x) \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ . \\ . \\ g_N(x) \end{pmatrix}$$

حيث $G_i = \{g_1, g_2, \ldots g_N\}$ نظام البدء (مثلاً نضع $g_i = x_i^{d_i} - 1$، حيث $d_i = deg(f_i)$ من أجل $N \geq i \geq 1$)،

من أجل حساب $S_i \subseteq X$ انطلاقاً من نظام البدء G_i ،

.iv إذا كان $p \in S_i$، نضع $dim_p(X) = i$ وتنتهي الخوارزمية وإلا نضع $i = d - 1$ و نعود إلى (i) .

الإثبات: بدايةً من الواضح أن الخوارزمية محدودة (منتهية: لا تعمل بلا توقف) وذلك لأنها تبدأ عند[3] $i = d \leq N$ و تنتهي عند $i = 0$.

إن المجموعة الجبرية $X = \cup_{i=0}^{d} X_i$ اجتماع لمجموعات خالية أو لمجموعات جبرية X_i بُعدها i ، في حالة $d = \dim(X) = 0$ فإن X مكونة من عدد منته من

[3] إن الخوارزمية في [5] تبدأ دائماً عند N بينما هنا تبدأ عند قيمة أصغر تماما من N ($d < N$ إذا كان $dim(X) = N$ فأن $X = \mathbb{C}^N$)، و ذلك لأننا استخدمنا قاعدة $Groebner$ من أجل تحديد البعد الذي سنبدأ به.

النقاط في $\mathbb{C}^N$ والنقطة p إحدى هذه النقاط، وعندها يكون البُعد المحلي للمجموعة الجبرية $\dim_p(X) = 0$.

أما في حالة $d = \dim(X) > 0$ فإن المركبات المختزلة للمجموعة الجبرية المُعرّفة بالمثالي $I =< \grave{F} >$ ذات البُعد i ، $i \in \{1,2, \dots, d\}$، هي ذاتها المركبات المختزلة للمجموعة الجبرية المُعرّفة بالمثالي $J =< F >$ المولّد بالشكل التربيعي، وذلك حسب المبرهنة (2.2). بما أن

$$\dim(X_i) + \dim(L_i) = i + (N - i) = N$$

فإن L_i يتقاطع فقط مع المركبة X_i بمجموعة بُعدها

$$\dim(X_i \cap L_i) = i + (N - i) - N = 0$$

أي بعدد منته من النقاط ولا يتقاطع مع أي مركبة بُعدها أصغر من i، وذلك حسب المبرهنة (4.1)، أي أن $\boldsymbol{S_i = X \cap L_i = X_i \cap L_i}$.

فإذا كانت النقطة $p \in S_i$ فهي تنتمي إلى المركبة X_i ولا تنتمي إلى X_j و ذلك من أجل $\forall j \in \{1, 2, \dots\dots, i - 1\}$ لأن L_i لا يتقاطع مع المركبة X_j، و بما أن الخوارزمية بدأت بشكل تنازلي من أكبر بُعد فإن p لن تنتمي أيضاً لأي مركبة بُعدها أكبر من i وبالتالي يكون البُعد المحلي للمجموعة الجبرية X عند النقطة p هو $\dim_p(X) = i$ و بذلك تكون الخوارزمية صحيحة.

4.1. مثال: ليكن $I =< \grave{f}_1, \grave{f}_2, \grave{f}_3 >$ مثالي في $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ و $X = V(I)$ المجموعة الجبرية المولدة بـ I، حيث $\grave{f}_1 = (x^3 + z)(x^2 - y)$، $\grave{f}_2 = (x^3 + y)(x^2 - z)$ و $\grave{f}_3 = (x^3 + z)(x^3 + y)(z^2 - y)$.

ولتكن $p = (-1,0,1)$. المطلوب تحديد البُعد المحلي لـ X عند النقطة p .

من المثال السابق (2.1 مثال) $d = \dim(X) = 1$، لذلك سنبدأ من $i = 1$، (بينما في الخوارزمية [5] تبدأ من $N = 3$).

نُعرف فضاء خطي $L_1 = V(l_1)$ حيث

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = x + 2y + 3z - 2$$

نختزل الجملة $F = \{\hat{f_1}, \hat{f_2}, \hat{f_3}, l_1\}$ إلى شكل تربيعي، إن $N = 3 < n = 4$ ،

لذلك نختار مثلاً $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ومنه

$$\Lambda\,.\,F = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x^3+z})(\boldsymbol{x^2-y}) \\ (\boldsymbol{x^3+y})(\boldsymbol{x^2-z}) \\ (\boldsymbol{x^3+z})(\boldsymbol{x^3+y})(\boldsymbol{z^2-y}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (x + 2y + 3z - 2)$$

$$= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x^3+z})(\boldsymbol{x^2-y}) + (x + 2y + 3z - 2) \\ (\boldsymbol{x^3+y})(\boldsymbol{x^2-z}) - (x + 2y + 3z - 2) \\ (\boldsymbol{x^3+z})(\boldsymbol{x^3+y})(\boldsymbol{z^2-y}) + 2(x + 2y + 3z - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

نُعرف دالة الـ Homotopy : بداية نختار نظام[4] بدء $G_1 = \{g_1, g_2, g_3\}$ مثلاً

نختار $g_1 = x^5 - 32$ ، $g_2 = y^5 - 32$ ، $g_3 = z^8 - 256$

$$H(x,y,z,t) = (1-t)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$$

نجد

$$S_1 = \{(-1,1,0.333), (-0.826,0.565, 0.565), (0,0,0.666), (-1,0,1), (0.413 + i * 0.559, 0.317 - i * 0.112, 0.317 + i * 0.112), (0,1,0)\}$$

نلاحظ أن[5] $p \in S_1$ وبالتالي يكون البُعد المحلي $\dim_p(X) = 1$.

---

[4] استخدام $Bertini$ في حساب S_1 ، يختار نظام بدء حيث يكون أصفاره سهلة الحساب.

[5] S_1 تحوي 27 نقطة والتي تمثل أصفار الشكل التربيعي $\Lambda F(x,y,z)$ ولكن أخترنا منها فقط النقاط التي تمثل أصفار $F(x,y,z)$ أي نقاط التقاطع $X_1 \cap l_1$ ، وبينما بقية النقاط تنتمي إلى المكبة ذات البُعد الصفري للمجموعة الجبرية المُعرّفة بالشكل التربيعي.

5. **الخاتمة:** إن الخوارزمية في [**5**] تستخدم فقط دالة الـ "Homotopy" ومنفذة في برنامج واحد "$\boldsymbol{Bertini}$" ولكن تبدأ من $\boldsymbol{N}$ عدد المتغيرات والذي هو أكبر تماماً من بُعد المجموعة الجبرية أي أنها تحتاج إلى عدد خطوات أكبر، والخوارزمية في [2] تستخدم القواعد القياسية ومفهوم "Witness point sets" و "triangular sets" وصفة الاستمرارية في دالة الـ "Homotopy" ولكنها منفذة في برنامجي جبر الكمبيوتر "SINGULAR" و"Bertini"، وفي هذا البحث تم استخدام القواعد القياسية من أجل حساب البُعد ودالة الـ "Homotopy" وتُعد تحسيناً لأنها تبدأ من بُعد المجموعة الجبرية الذي هو أصغر تماما من عدد المتغيرات . نتطلع في المستقبل إلى تحسين الخوارزمية وتنفيذها في برنامج واحد وذلك من خلال البحث و إيجاد مبرهنات وخواص في الجبر التبادلي والهندسة الجبرية التي ربما تُغني عن استخدام دالة الـ "Homotopy" أو القواعد القياسية الذي سيؤدي بدوره إلى تنفيذ الخوارزمية في برنامج واحد فقط مع تحسين الخوارزمية من خلال البُعد أو استخدام كثيرات حدود خطية في نظام البدء أو غير ذلك.

المراجع العلمية:

REFERENCES:

1. Sh. Al Rashed, G. Pfister. Numerical Decomposition of Affine Algebraic Varieties, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica, vol. XX, fasc. 3.2014 .
2. Sh. Al Rashed : Numerical Algorithms in Algebraic Geometry. Verlag Suedwest deutscher fuer Hochschulschriften ISBN - 13: 978 - 3 - 8381 - 1350 - 0. 2011.
3. Atiyah, M. F, Introduction to commutative Algebra. Universitry of Oxford. 1967.
4. D.J. Bates, J.D. Hauenstein, A.J. Sommese and C.W. Wampler Bertini : Software for Numerical Algebraic Geometry. http://www.nd.edu/_sommese/bertini/.
5. D.J. Bates, J.D. Hauenstein, C. Peterson and A.J. Sommese . Numerical Local Dimension Test for Points on the Solution Set of a System of Polynomial Equations. SIAM J. Number. Anal. Vol. 47, No. 5, pp. 3608 - 3623. Novemebr 13, 2009.
6. COX D,LITTLE J, and O'SHEA D, 1998-Using Algebraic . Geometry, Springer-Verlag, second edition, New York-Berlin-Heidelberg, 572p.
7. Chow, Mallet-Paret, and Yorke: Total degree homotopy, 1978.
8. W. Decker, G.-M Greuel, G. P_ster and H. Schoenemann. Singu- lar 3-1-1 | A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2010).
9. W. Decker, G.-M. Greuel, G. P_ster: "Primary decomposition: algorithms and comparisons." In: G.-M. Greuel, B.H. Matzat, G. Hiss: Algorithmic Algebra and Number Theory. Springer Verlag, Heidelberg (1998), 187 - 220.
10. Eisenbud, D., Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry. Spriger-Verlay, 2008 .
11. G.-M. Greuel and G. P_ster. A Singular Introduction to Commutative Algebra. Second edition, Springer (2007).
12. Morgan's Book on polynomial continuation 1987.

13. A.J. Sommese and J. Verschelde. Numerical homotopies to compute generic points on positive dimensional algebraic sets. J. of Complexity 16(3):572 - 602, (2000).
14. [A.J. Sommese and C.W. Wampler. The Numerical Solution of Systems of Polynomials Arising in Engineering and Science. ISBN 981 - 256 -184 - 6. Word Scienti_c Publishing Co. Plte. Ltd. 2005.
15. A. J. Sommese and C.W. Wampler. Numerical algebraic geometry. In the mathematics of numerical analysis. (Park City, UT, 1995), Vol. 32 of lectures in Appl. Math. (pp. 749 - 763). Providence, RI: Amer. Math.Soc.
16. Hai-Jun Su, J. Micheal Mc Carthy, and Layne. T. Watson: Algorithm 857: PolySYS-GLP-A Parallel General Linear Product Homotopy Code for Solving Polynomial Systems of Equations. ACM Transaction on Mathematical Software, Vol. 32, No. 4, December 2006, Pages 561 -579.
17. J. Verschelde(1996). Homotopy continuation methods for solving polynomial systems. PhD thesis, Katholihe Universiteit Leuven.
18. J. Verschelde(1999). Algorithm 795: PHCpack:Ageneral-purpose solver for polynomial systems by homotopy continuation. ACM Trans. On Math. Software, 25(2), 251 - 276.
19. Layne.T. Watson: Globally Convergent Homotopy Algorithms for Nonlinear Systems of Equation. Nonlinear Dynamics 1:143 - 191. 1990 Kluwer Academic Publishers.