دراسة في مبرهنات التماثل لجداء المخططات الحلقية

منتصر زحلان*

الملخص

درس هذا البحث المخططات الديكارتية (Cartesian diagrams) للجداءات، وبيّن مدى أهمية المخططات الديكارتية في تبسيط الإثباتات لبعض مبرهنات التماثل في جداء المخططات الحلقية (schemes). بدأ البحث بتوظيف توطئة (Yoneda lemma) لنتمكن من إثبات بعض مبرهنات التماثل لجداء المخططات الحلقية بواسطة جداء المجموعات، وذلك لأن تعريف جداء المجموعات أبسط بكثير مقارنة بتعريف جداء المخططات الحلقية. بيّنت النتيجة (3–5) وجود تكافؤ بين المخططات الديكارتية للمجموعات والمخططات الديكارتية للمخططات الحلقية، وبيّنت المبرهنة (3–9) كيفية استخدام المخططات الديكارتية في إثبات تماثل بين مخططين حلقيين. وظّفت المبرهنة (3 – 9) في إثبات كل من المبرهنة (4– 1) التي بيّنت وجود التماثل $X \times_X (X \times_S Y) \approx X \times_S Y$ اذ كل من X و Y مخطط حلقي على S ولمبرهنة (4 – 2) التي بيّنت وجود التماثلات $(X \times_S Y) \times_Y Z \approx Z \times_Y (X \times_S Y) \approx X \times_S Z \approx Z \times_S X$ اذ كل من X و Y هو مخطط حلقي على S و Z مخطط حلقي على Y، ثم وظّفت المبرهنة (4 – 2) في

*قسم الرياضيات–كلية العلوم –جامعة دمشق–سورية.

إثبات الخاصة التجميعية لجداء المخططات الحلقية $(X \times_S Y) \times_S Z \approx X \times_S (Y \times_S Z)$.
وأخيراً وظّفت المبرهنة (4 – 4) في إثبات صحة المبرهنة (4 – 5) التي بيّنت وجود التماثل $X \times_S Y \approx X \times_T Y$ اذ كل من X و Y مخطط حلقي على S مع افتراض وجود غمر $\sigma : S \to T$.

الكلمات المفتاحية: مخططات ديكارتية، مخطط حلقي، جداء المخططات الحلقية.
Msc 2010: 14 A 15. 18 A 05

Study in Isomorphism Theorems of Schemes Product

Montaser Zahlan*

Abstract

This research studies the Cartesian diagrams of products, and we clarify by this research the importance of the Cartesian diagrams in simplifying proofs of some isomorphism theorems of schemes product. The research starts by employing the Yoneda Lemma to be able to prove some of isomorphism theorems of schemes product by using product of sets, and that is because the definition of the product of sets is more simpler in comparison with the definition of schemes product. The corollary (3-5) shows that there is an equivalence between the Cartesian diagrams of sets and the Cartesian diagrams of schemes, theorem (3 – 9) shows how to use the Cartesian diagrams in proving isomorphism between tow schemes. Theorem (4 – 9) was employed in proving the theorem (4 – 1) - which shows the isomorphism $X \times_X (X \times_S Y) \approx X \times_S Y$ where each of X and Y is S-scheme - and the theorem (4 – 2) which shows the isomorphisms $(X \times_S Y) \times_Y Z \approx Z \times_Y (X \times_S Y) \approx X \times_S Z \approx Z \times_S X$ where each of X and Y is S-scheme and Z is Y-scheme , theorem (4 – 2) was employed in proving the associative property of schemes product $(X \times_S Y) \times_S Z \approx X \times_S (Y \times_S Z)$. Theorem (4 – 4) shows that if σ is an

* Department of Mathematics, The fourth Faculty of Sciences in Suwayda, Damascus University, Syria.

immersion then it can be canceled of the left in composing morphisms between schemes, which was employed in proving the theorem (4 – 5) which shows the isomorphism $X \times_S Y \approx X \times_T Y$ where each of X and Y is S -scheme in addition to the assumption that there is an immersion $\sigma : S \to T$.

Key words: Cartesian diagrams, scheme, schemes product.
Msc 2010: 14 A 15. 18 A 05

(1 − 1) تعريف الفئة (Category): [1], [3]

الفئة C تتألف من:

(1) صف $ob(C)$ عناصرها تسمى أشياء (Objects) الفئة C.

(2) من أجل كل $X, Y \in ob(C)$ توجد مجموعة $Hom_C(X,Y)$ عناصرها تسمى المورفيزمات (Morphisms) من X إلى Y.

(3) من أجل كل $X,Y,Z \in ob(C)$ يوجد تطبيق (map) يسمى التركيب $Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z) \to Hom_C(X,Z)$ يرمز له بـ $(f,g) \mapsto g \circ f$

بحيث يتحقق الشرطان الآتيان:

(a) التركيب المعرف في (3) تجميعي.

(b) من أجل كل $X \in ob(C)$ يوجد $id_X \in Hom_C(X,X)$ بحيث يتحقق ما يأتي:

من أجل كل $f \in Hom_C(X,Y)$ ، $g \in Hom_C(Y,X)$ فإن $f \circ id_X = f$, $id_X \circ g = g$

(1 − 2) تعريف الفئة العكسية (Opposite Category): [3] **[1],**

تعرف الفئة العكسية C^{opp} لفئة C بالشكل الآتي:

$$ob(C^{opp}) = ob(C) \text{ ، } Hom_{C^{opp}}(X,Y) = Hom_C(Y,X) .$$

(1 − 3) تعريف الدالي (Functor) بين فئتين: [3] ,[1]

لتكن C و $C`$ فئتين. الدالي $F$ من الفئة $C$ إلى الفئة $C`$ يتكون من:

(1) تطبيق: $F : ob(C) \to ob(C`)$

(2) من أجل كل $X,Y \in ob(C)$ يوجد تطبيق، أيضاً نرمز له بـ: $F : Hom_C(X,Y) \to Hom_{C`}(F(X),F(Y))$ بحيث يتحقق ما يأتي:

$F(f\circ g)=F(f)\circ F(g)$ ، $F(id_X)=id_{F(X)}$

لتعريف المخطط الحلقي(scheme) لا بدّ من تقديم التعاريف و المبرهنات الآتية:

(ملاحظة: : فيما يأتي الحلقات التي نتعامل معها جميعها حلقات تبديلية)

(1 – 4) تعريف حزمة (Sheaf) الحلقات: [4], [5]

الحزمة من الحلقات O على فضاء طبولوجي X هي الزوج من المجموعات:

$$O=(\{O(U);U\in\Omega\},\{r_{V,U};U,V\in\Omega,V\subseteq U\})$$

(إذ إن Ω هي جماعة المجموعات الجزئية المفتوحة من X كلّها، $O(U)$ حلقة، $r_{V,U}$ تشاكل حلقي من $O(U)$ إلى $O(V)$ وتسمى $r_{V,U}$ بتشاكلات الإسقاط) بحيث يتحقق ما يأتي:

(1) $O(\Phi)=\{0\}$.

(2) $r_{U,U}:O(U)\to O(U)$ التشاكل الحلقي المطابق.

(3) $r_{W,U}=r_{W,V}\circ r_{V,U}$ من أجل كل $U,V,W\in\Omega$ اذ إن $W\subseteq V\subseteq U$.

(4) لتكن $\{U_j;j\in J\}$ تغطية مفتوحة لمجموعة مفتوحة U، $\alpha\in O(U)$. فإنه يتحقق ما يأتي:

إذا كان $r_{U_j,U}(\alpha)=0$ من أجل كل $j\in J$ فإن $\alpha=0$.

(5) لتكن $\{U_j;j\in J\}$ تغطية مفتوحة لمجموعة مفتوحة U، وليكن $\alpha_j\in O(U_j)$ معطى من أجل كل $j\in J$ بحيث يكون $r_{U_i\cap U_j,U_i}(\alpha_i)=r_{U_i\cap U_j,U_j}(\alpha_j)$ من أجل كل $i,j\in J$. عندئذ: يوجد $\alpha\in O(U)$ بحيث يكون: $r_{U_j,U}(\alpha)=\alpha_j$.

(1 – 5) تعريف المورفيزم (morphism) بين حزمتي حلقات: [4], [5]

لتكن O ، $O`$ حزمتي حلقات على فضاء طبولوجي $X$ المورفيزم $\theta : O \to O`$ يعرف بأنه جماعة من التشاكلات الحلقية $\{\theta_U : O(U) \to O`(U); U \in \Omega\}$ بحيث يتحقق ما يأتي:

$s_{V,U}(\theta_U(\alpha)) = \theta_V(r_{V,U}(\alpha))$ من أجل كل $\alpha \in O(U)$ اذ إن $s_{V,U}$ هي تشاكلات الإسقاط للحزمة $O`$.

(1 – 6) تعريف: ليكن $\theta : O \to O`$ و $\theta` : O` \to O``$ مورفيزمين بين حزم حلقات على فضاء طبولوجي $X$. نعرف تركيب المورفيزمين $\theta$ و $\theta`$ بأنه مورفيزم بين حزمتي الحلقات $O$ و $O``$ نرمز له بالرمز $\theta` \circ \theta$ وهو يتكون من جماعة التشاكلات الحلقية $\{\theta`_U \circ \theta_U : O(U) \to O``(U) ; U \in \Omega\}$.

وإذا كان $O`` = O$ وتحقق الشرطان $\theta`_U \circ \theta_U = id_U$ و $\theta_U \circ \theta`_U = id_{U`}$ ، اذ $id_U$ التشاكل الحلقي المطابق على الحلقة $O(U)$ ، نقول إن كلاً من $\theta$ و $\theta`$ تماثل و إن O و $O`$ متماثلتان، و نرمز لذلك بـ $O \approx O`$. [5]

(1 – 7) تعريف النهاية الاستنتاجية (inductive limit): [6], [7]

لتكن I مجموعة مرتبة جزئياً بحيث تحقق الشرط الآتي: من أجل كل $i, j \in I$ يوجد $k \in I$ بحيث $i \le k, j \le k$. ولتكن $\{M_i\}_{i \in I}$ أسرة من المقاسات على حلقة A وليكن $\mu_{ij} : M_i \to M_j$ تشاكلاً مقاسياً على الحلقة A بحيث يتحقق الشرطان:

(1) $\mu_{ii} : M_i \to M_i$ هو التشاكل المقاسي المطابق من أجل كل $i \in I$.

(2) $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$ من أجل كل $i \le j \le k$.

نقول في هذه الحالة : إن $(\{M_i\}_{i\in I},\{\mu_{ij}\}_{i\leq j})$ تشكل نسقا استنتاجياً (inductive system).

النهاية الاستنتاجية للنسق الاستنتاجي $(\{M_i\}_{i\in I},\{\mu_{ij}\}_{i\leq j})$ هي الزوج $(M,\{\mu_i : M_i \to M\}_{i\in I})$ الذي يتكون من مقاس M على الحلقة A وجماعة من التشاكلات المقاسية $\{\mu_i : M_i \to M\}_{i\in I}$ بحيث يتحقق مايأتي: $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$ من أجل كل $i \leq j$ وإذا وجد مقاس N على الحلقة A وجماعة من التشاكلات المقاسية $\{\varphi_i : M_i \to N\}_{i\in I}$ تحقق الشرط $\varphi_i = \varphi_j \circ \mu_{ij}$ من أجل كل $i \leq j$، فإنه يوجد تشاكل مقاسي وحيد $\mu : M \to N$ بحيث يكون $\varphi_i = \mu \circ \mu_i$ من أجل كل $i \in I$، ونرمز للنهاية الاستنتاجية $(\{M_i\}_{i\in I},\{\mu_{ij}\}_{i\leq j})$ بالرمز $\varinjlim_{i\in I} M_i$.

(1 – 8) مبرهنة: لتكن O حزمة حلقات على فضاء طبولوجي X ، عندئذ تكون

$$\varinjlim_{P\in U, U\in\Omega} O(U)$$

حلقة. [5] سوف نرمز للنهاية الاستنتاجية $\varinjlim_{P\in U, U\in\Omega} O(U)$ بالرمز $O_{X,P}$ أو بالرمز O_P إذا لم يكن هناك التباس بالنسبة للفضاء الطبولوجي X ، وإذا كانت $\mu_U : O(U) \to O_P$ هي التشاكلات المقاسية المتعلقة بالنهاية الاستنتاجية O_P حيث $U \in \Omega$، سوف نرمز لقاعدة ربط هذه التشاكلات بـ $\mu_U(\alpha) = \alpha_p$ ، حيث $\alpha \in O(U)$.

(1 – 9) مبرهنة: [5]

ليكن $\theta : O \to O`$ مورفيزم بين حزمتي حلقات على فضاء طبولوجي X . عندئذ يتحقق ما يلي:

(1) يوجد تشاكل حلقي $\theta_p : O_p \to O`_p$ من أجل كل $p \in X$ ، بحيث يكون المخطط الآتي تبديليا

$$\begin{array}{ccc} O(U) & \overset{\theta_U}{\to} & O`(U) \\ r_{V,U} \downarrow & & \downarrow s_{V,U} \\ O(V) & \overset{\theta_V}{\to} & O`(V) \\ \mu_V \downarrow & & \downarrow \mu`_V \\ O_P & \overset{\theta_p}{\to} & O_P \end{array}$$

من أجل كل $U,V \in \Omega$ و $V \subseteq U$، حيث μ_V ، $\mu`_V$ هي التشاكلات المقاسية المتعلقة بالنهايتين الاستنتاجيتين $O_p$ و $O`_p$ على الترتيب.

(2) إذا كانت $\alpha \in O(U)$ فإن $(\theta_U(\alpha))_P = \theta_p(\alpha_p)$.

(3) بفرض $\alpha \in O(U)$ و $\beta \in O(V)$ فإن $\alpha_p = \beta_p$ إذا وفقط إذا وجد جوار $W \subseteq U \cap V$ للنقطة p بحيث $r_{W,U}(\alpha) = r_{W,V}(\beta)$.

(1 – 10) نتيجة: بفرض $\alpha, \beta \in O(U)$ وتحققت المساواة $\alpha_p = \beta_p$ من أجل كل $p \in U$ فإن $\alpha = \beta$.

البرهان: لدينا $\alpha_p = \beta_p$ وبالتالي يوجد جوار $W \subseteq U$ للنقطة p بحيث $r_{W,U}(\alpha) = r_{W,U}(\beta)$ وذلك حسب المبرهنة (1 – 10)، أي أن $r_{W,U}(\alpha - \beta) = 0$ وذلك من أجل كل $p \in U$ ، وبالوقت نفسه الجوارات W تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة المفتوحة U. مما سبق نستنتج أن $\alpha - \beta = 0$ و ذلك حسب الشرط (4) من تعريف حزمة الحلقات، أي أن $\alpha = \beta$.

(1 – 11) تعريف: ليكن a مثالياً من حلقة A، نعرف المجموعة $V(a)$ بأنها مجموعة المثاليات الأولية في A والتي تحوي a.

سوف نرمز بـ $SpecA$ إلى مجموعة المثاليات الأولية كلّها في الحلقة A.

(1 – 12) مبرهنة: ليكن $D(a) = SpecA - V(a)$ اذ إن a مثالي في الحلقة A. عندئذ الجماعة $\tau = \{D(a); a \subseteq A\}$ تشكل طبولوجياً على $SpecA$. [4], [5], [6]

تسمى τ في المبرهنة السابقة بطبولوجيا زاريسكي (Zarisky) على $SpecA$، و للاختصار سوف نذكر الفضاء الطبولوجي $SpecA$ لنعني به الفضاء الطبولوجي $(SpecA, \tau)$.

(1 – 13) إنشاء حزمة حلقات على $SpecA$: [4]

لنرمز بـ A_P إلى الحلقة الموضعية (local ring) بالنسبة الى المثالي الأولي P من الحلقة A، و لتكن U مجموعة جزئية مفتوحة من $SpecA$، Ω هي جماعة المجموعات الجزئية المفتوحة كلّهامن $X = SpecA$ لنرمز بـ $O(U)$ لمجموعة التوابع من الشكل: $s: U \to \coprod_{P \in U} A_P$

(إذ إن $\coprod_{P \in U} A_P$ هو الاجتماع المنفصل (disjoint union) للمجموعات A_P) بحيث $s(P) \in A_P$ من أجل كل $P \in U$، وأيضاً من أجل كل $P \in U$ يوجد جوار مفتوح $V \subseteq U$ للنقطة P وعنصران $a, f \in A$ بحيث يتحقق ما يأتي: من أجل كل $q \in V$ يكون $f \notin q$ و $s(q) = \frac{a}{f}$ في A_q. لنعرف $r_{V,U} : O(U) \to O(V)$ بالشكل الآتي $r_{V,U}(s) = s|_V$ (مقصور s على V) أي $s|_V : V \to \coprod_{P \in V} A_P$، وسوف

نرى أن $O(U)$ تشكل حلقة وأن $r_{V,U}$ عبارة عن تشاكلات حلقية من خلال المبرهنة (1 − 14) الآتية.

(14−1) مبرهنة: إن $O = (\{O(U); U \in \Omega\}, \{r_{V,U}; V,U \in \Omega, V \subseteq U\})$ تشكل حزمة حلقات على $SpecA$ اذ إن $O(U)$ و $r_{V,U}$ هي على الترتيب الحلقات وتشاكلات الاسقاط المعرفة في الفقرة (1 − 13)، و إن $O_{X,P} \approx A_P$ أي إن $O_{X,P}$ حلقة موضعية وإن مثاليها الأعظمي هو $m_P \approx P.A_P$. [4]

(1 − 15) تعريف: تسمى الثنائية $(SpecA, O)$ المكونة من الفضاء الطبولوجي $SpecA$ وحزمة الحلقات O المعرفة في الفقرة (1 − 13) بالمخطط الحلقي التآلفي (Affine Scheme) (وللتمييز يمكن أن نستخدم الرمز O_{SpecA} بدلاً من O). [4], [5], [6]

(1 − 16) تعريف: الفضاء الحلقي (ringed space) هو ثنائية (X, O_X) تتكون من فضاء طبولوجي X وحزمة حلقات O_X على X . وإذا كانت $O_{X,P}$ حلقة موضعية من أجل كل $P \in X$ سوف نقول: إن (X, O_X) فضاء حلقي موضعي. [4], [5], [6]

(1 − 17) تعريف: ليكن (X, O_X) فضاءَ حلقياً، نعرف مقصوره على مجموعة مفتوحة $U \subseteq X$ الذي نرمز له بـ $(U, O_X|_U)$ بالشكل الآتي: من أجل كل مجموعة جزئية مفتوحة V من U (ومن ثمّ V مفتوحة في X) نعرف $O_X|_U(V)$ بأنها $O_X(V)$. [4], [5]

(1 − 18) تعريف المخطط الحلقي: المخطط الحلقي هو فضاء حلقي موضعي (X, O_X) يحقق الشرط الآتي: من أجل كل نقطة $P \in X$ يوجد جوار مفتوح U للنقطة P في X بحيث يكون $(U, O_X|_U)$ مخططاً حلقياً تآلفياً. وللاختصار سوف نقول المخطط الحلقي X . [4], [5], [6]

(1 – 19) تعريف: المورفيزم (morphism) من مخطط حلقي X إلى مخطط حلقي Y هو زوج $(f, f^{\#})$ يتكون من تطبيق مستمر $f : X \to Y$ بين الفضاءين الطبولوجيين X و Y، فضلاً عن مورفيزم $f^{\#} : O_Y \to f_* O_X$ بين حزمتي الحلقات O_Y و $f_* O_X$ ، اذ $f_* O_X$ هي حزمة حلقات على Y معرفة بالشكل الآتي:

من أجل أي مجموعة جزئية مفتوحة U من Y نعرف $f_* O_X(U)$ كما يأتي: $f_* O_X(U) = O_X(f^{-1}(U))$.

وسوف نكتفي بالقول: المورفيزم $f : X \to Y$ بين مخططين حلقيين X، Y للاختصار بدلاً من الكتابة $(f, f^{\#}) : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$. [4], [5]

(1 – 20) مبرهنة: ليكن $f : X \to Y$ مورفيزما بين المخططين الحلقيين X, Y . عندئذ يوجد تشاكل حلقي موضعي $f_P^{\#} : O_{Y, f(P)} \to O_{X,P}$ (أي انّ $f_P^{\#}(m_{f(P)}) \subseteq m_P$). [4], [5], [6]

(1 – 21) تعريف: المورفيزم المطابق على المخطط الحلقي X هو الثنائية $(id, id^{\#})$ اذ $id : X \to X$ هو التطبيق المطابق على الفضاء الطبولوجي X ، $id^{\#} : O_X \to O_X$ هو المورفيزم المطابق على حزمة الحلقات O_X إذ $id_* O_X = O_X$ و $id_U^{\#} : O_X(U) \to O_X(U)$ هو التشاكل الحلقي المطابق على الحلقة $O_X(U)$. [5]

(22–1) تعريف:[5] تركيب المورفيزمين $(f, f^{\#}) : (X, O_X) \to (Y, O_Y)$ $(g, g^{\#}) : (Y, O_Y) \to (Z, O_Z)$ هو الزوج $(g \circ f, \Theta)$ اذ $\Theta : O_Z \to (g \circ f)_* O_X = g_*(f_* O_X)$ هو المورفيزم المعرف بالشكل الآتي: من أجل كل مجموعة جزئية ومفتوحة U من Z يكون لدينا التشاكل الحلقي $\Theta_U : O_Z(U) \to O_X(f^{-1}(g^{-1}(U)))$ وهو التركيب: $f_{g^{-1}(U)}^{\#} \circ g_U^{\#}$. وسوف نرمز

لتركيب المورفيزمين $(f,f^{\#})$ ، $(g,g^{\#})$ بـ $(g,g^{\#})\circ(f,f^{\#})$ واختصاراً سوف نرمز لذلك بـ $g\circ f$.

وإذا تحققت العلاقة $(g,g^{\#})\circ(f,f^{\#})=(id,id^{\#})$ فسوف نقول إن كلا من المورفيزمين $(f,f^{\#})$ و $(g,g^{\#})$ هو تماثل ونقول أيضاً: إن المخططين الحلقيين X,Y متماثلان، وسوف نرمز لذلك بـ $X\approx Y$.

(1 – 23) تعريف: ليكن S مخططاً حلقياً، المخطط الحلقي على S هو مخطط حلقي X فضلاً عن مورفيزم $\varphi:X\to S$. وإذا كان Y مخططا حلقيا آخر على S بواسطة المورفيزم $\psi:Y\to S$ وكان $f:X\to Y$ مورفيزما بين المخططين الحلقيين X و Y ، نقول: إن f مورفيزم على S إذا تحقق الشرط الآتي: $\psi\circ f=\varphi$. [4], [5], [6]

(1 – 24) تعريف: الغمر (immersion) هو مورفيزم $(f,f^{\#}):(X,O_X)\to(Y,O_Y)$ بين مخططين حلقيين X و Y بحيث يتحقق ما يأتي: توجد مجموعة جزئية ومغلقة موضعياً (locally closed) W من الفضاء الطبولوجي Y بحيث ينتج بواسطة التطبيق المستمر $f:X\to Y$ هومومورفيزما (homeomorphism) بين الفضاء الطبولوجي X والمجموعة W بوصفها فضاء طبولوجياً جزئياً من الفضاء الطبولوجي Y ، وأيضاً من أجل كل $P\in X$ فإن التشاكل الحلقي $f_P^{\#}:O_{Y,f(P)}\to O_{X,P}$ هو تشاكل حلقي غامر [6]

2– توطئة (Yoneda Lemma)

(2 – 1) تعريف الدالي h_X . [1], [6]

لتكن C فئة ما، نعرف الدالي h_X لأجل كل شيء X من الفئة C كما يأتي:

$$h_X:C^{opp}\to(Sets)$$
$$S\mapsto h_X(S)=Hom_C(S,X)$$

ومن أجل المورفيزم: $u:S`\to S$ من $Hom_{C^{opp}}(S,S`)=Hom_C(S`,S)$ اذ $S,S`\in C$ نعرف تأثير h_X على u بالشكل الآتي:

$$h_X(u):h_X(S)\quad\to\quad h_X(S`)$$
$$f\mapsto f\circ u$$

اذ $(Sets)$ هي فئة كل المجموعات، C^{opp} الفئة العكسية.

(2 – 2) تعريف: [1]

التحويل الطبيعي (natural transformation) μ بين داليين $F,G:C\to C`$ يتألف من صف المورفيزمات $\{\mu_X:F(X)\to G(X)\}_{X\in ob(C)}$، بحيث يتحقق الشرط الآتي: من أجل أي مورفيزم $f:X\to X`$ من $Hom_C(X,X`)$، يكون المخطط

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\mu_X} & G(X) \\ F(f)\downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(X`) & \xrightarrow{\mu_{X`}} & G(X`) \end{array}$$

تبديلياً في الفئة $C`$.

ويمكن تعريف تركيب تحويلين طبيعيين μ و ν (اذ μ هو تحويل طبيعي بين داليين F و G، و ν هو تحويل طبيعي بين داليين G و H) بأنه التحويل الطبيعي المؤلف من صف المورفيزمات $\{\nu_X\circ\mu_X:F(X)\to H(X)\}_{X\in C}$ و نرمز لهذا التركيب بـ $\nu\circ\mu$.

(3 − 2) توطئة (Yoneda Lemma) : [1], [3], [6]

لتكن $\hat{C}$ فئة الداليات من C^{opp} إلى $(Sets)$ ، أي انّ $ob(\hat{C}) = \{F; F : C^{opp} \to (Sets) \text{ is a functor}\}$ و $Hom_{\hat{C}}(F,G)$ هي مجموعة التحويلات الطبيعية بين الداليين F و G اذ تكون عملية التركيب بين مورفيزمات الفئة $\hat{C}$ هي عملية تركيب التحويلات الطبيعية. عندئذ:

التطبيق المعرف بالشكل الآتي:

$$\theta_X : Hom_{\hat{C}}(h_X, F) \to F(X)$$
$$\alpha \mapsto \alpha_X(id_X)$$

هو تقابل بحيث يكون المخطط الآتي تبديليا، وذلك من أجل أي مورفيزم $g : X \to X`$ من المجموعة $Hom_{C^{opp}}(X`, X) = Hom_C(X, X`)$

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\hat{C}}(h_{X`}, F) & \xrightarrow{\theta_{X`}} & F(X`) \\ \overline{\alpha} \downarrow_{\alpha \circ h_g} \downarrow & & \downarrow F(g) \\ Hom_{\hat{C}}(h_X, F) & \xrightarrow{\theta_X} & F(X) \end{array}$$

اذ $F \in ob(\hat{C})$ و $h_g \in Hom_{\hat{C}}(h_X, h_{X`})$ ، أي انّ $h_g$ تحويل طبيعي بين الداليين $h_X$ و $h_{X`}$ معرف بواسطة المورفيزمات $h_{g,Y} : h_X(Y) \to h_{X`}(Y)$ اذ $h_{g,Y}(u) = g \circ u$. ويكون المخطط

$$\begin{array}{ccc} h_X(Y`) & \xrightarrow{h_{g,Y`}} & h_{X`}(Y`) \\ h_X(f) \downarrow & & \downarrow h_{X`}(f) \\ h_X(Y) & \xrightarrow{h_{g,Y}} & h_{X`}(Y) \end{array}$$

تبديلياً، وذلك من أجل أي مورفيزم $f : Y \to Y`$ من $Hom_{C^{opp}}(Y`, Y) = Hom_C(Y, Y`)$.

(2 – 4) نتيجة: إن التطبيق الآتي تقابل:

$$\varphi_X : Hom_{\hat{C}}(h_X, h_Y) \to h_Y(X)$$
$$\alpha \mapsto \alpha_X(id_X)$$

والمخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\hat{C}}(h_{X`}, h_Y) & \xrightarrow{\varphi_{X`}} & h_Y(X`) \\ \overset{\alpha}{\underset{\alpha\circ h_g}{\bar{\downarrow}}} \; \downarrow & & \downarrow h_Y(g) \\ Hom_{\hat{C}}(h_X, h_Y) & \xrightarrow{\varphi_X} & h_Y(X) \end{array}$$

اذ $g : X \to X`$ مورفيزم من المجموعة $Hom_C(X, X`) = Hom_{C^{opp}}(X`, X)$. [6]

انّ النتيجة (2-4) يمكن توظيفها من أجل المخططات الحلقية والمورفيزمات فيما بينها كما يأتي:

(2 – 5) نتيجة: [6] ليكن X , Y مخططين حلقيين على مخطط حلقي S. عندئذ يوجد تكافؤ بين البيانات الآتية:

(1) يوجد مورفيزم f على S من X إلى Y.

(2) من أجل المخططات الحلقية كلّها T على S يوجد تطبيق:

$$f(T) : X_S(T) \to Y_S(T)$$

إذ $X_S(T) \overset{def}{=} Hom_S(T, X)$ مجموعة المورفيزمات على S من T إلى X، بحيث يتحقق ما يأتي: من أجل أي مورفيزم $u : T` \to T$ لمخططين حلقيين على S يكون المخطط الآتي تبديلياً:

$$\begin{array}{ccc} X_S(T) & \xrightarrow{f(T)} & Y_S(T) \\ h_X(u)\downarrow & & \downarrow h_Y(u) \\ X_S(T`) & \xrightarrow{f(T`)} & Y_S(T`) \end{array}$$

البرهان: ينتج مباشرة من النتيجة $(2-4)$. اذ إن المخطط التبديلي ينتج من تعريف التحويل الطبيعي بين داليين.

3− جداءات المخططات الحلقية والمخططات الديكارتية

(3 − 1)تعريف جداءات المخططات الحلقية: [4], [5], [6], [8]

ليكن $\xi: X \to S$ ، $\mu: Y \to S$ مورفيزمين بين مخططات حلقية، نعرف جداء المخططين الحلقيين X ، Y على S بأنه ثلاثية (Z,p,q) تتكون من مخطط حلقي Z ومورفيزمين $p: Z \to X$ ، $q: Z \to Y$ بحيث يتحقق ما يأتي:

من أجل أي مورفيزمين $f: T \to X$ ، $g: T \to Y$ على S يجعلان المخطط الآتي تبديلياً:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \\ g\downarrow & & \downarrow \xi \\ Y & \xrightarrow{\mu} & S \end{array}$$

يوجد مورفيزم وحيد $\theta: T \to Z$ على S يجعل المخطط الآتي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "g"'] \arrow[drr, "f"] & & Z \arrow[d, "p"] \arrow[dll, "q"'] \\ Y & & X \end{tikzcd}$$

أي انّ $p\circ\theta=f$ ، $q\circ\theta=g$. ونرمز للمخطط الحلقي Z بالرمز $X\times_S Y$ ، ونرمز للمورفيزم θ بالرمز $(f,g)_S$ ،أو اختصاراً (f,g) ، ونسمي المورفيزمين p ، q مورفيزمي الإسقاط للجداء $X\times_S Y$.

(3 – 2) تعريف: ليكن $\xi: X\to S$ ، $\mu:Y\to S$ تطبيقين بين مجموعات X ، Y ، S .

نعرف جداء المجموعتين X ، Y على المجموعة S بأنه المجموعة الآتية:

$$X\times_S Y=\{(x,y)\in X\times Y;\xi(x)=\mu(y)\}$$

اذ $X\times Y$ هو الجداء الديكارتي للمجموعتين X ، Y . [6], [8]

(3 –3) تعريف: ليكن X و Y مخططين حلقيين على المخطط الحلقي S بواسطة المورفيزمين $\xi: X\to S$ ، $\mu:Y\to S$ وليكن $u:Z\to X$ و $v:Z\to Y$ مورفيزمين بين مخططات حلقية على S . نقول عن المخطط التبديلي الآتي : إنه ديكارتي إذا كان $(u,v):Z\to X\times_S Y$ تماثلاً.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & X \\ v\downarrow & & \downarrow\xi \\ Y & \xrightarrow{\mu} & S \end{array}$$

وسوف نضع مربعاً ($\square$) داخل المخطط للدلالة على أنه ديكارتي. [6]

(3 – 4) مبرهنة: ليكن X , Y مخططين حلقيين على مخطط حلقي S. عندئذ الجداء $X \times_S Y$ موجود و وحيد. [8] ,[5]

(3 – 5) نتيجة: يوجد تكافؤ بين المخططين الديكارتيين الآتيين.

$$\begin{array}{cccc} & Z & \xrightarrow{f} & X \\ \square & g\downarrow & & \downarrow \xi \\ & Y & \xrightarrow{\eta} & S \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & Z_S(T) & \rightarrow & X_S(T) \\ \square & \downarrow & & \downarrow \\ & Y_S(T) & \rightarrow & S_S(T) \end{array}$$

اذ إن الجداء في المخطط اليميني هو جداء مخططات حلقية، أمّا الجداء في المخطط اليساري فهو جداء مجموعات، وذلك من أجل كل مخطط حلقي T على S .

البرهان: حسب النتيجة (2– 5) يوجد تكافؤ بين مورفيزم $f: X \rightarrow Y$ على S ومجموعة التطبيقات $f(T): X_S(T) \rightarrow Y_S(T)$ من أجل كل مخطط حلقي T على S . ومن ثمّ التماثل $X \times_S Y \overset{(f,g)}{\rightarrow} Z$يكافئ التماثل $X \times_S Y(T) \overset{(f,g)(T)}{\rightarrow} Z_S(T)$. لكن من تعريف الجداء يكون $X \times_S Y(T) = Hom_S(T, X \times_S Y) \approx Hom_S(T,X) \times_{S_S(T)} Hom_S(T,Y)$

أي انّ $X \times_S Y(T) \approx X_S(T) \times_{S_S(T)} Y_S(T)$ كمجموعتين. ومنه يكون التماثل $X \times_S Y \overset{(f,g)}{\rightarrow} Z$ مكافئاً للتماثل $X_S(T) \times_{S_S(T)} Y_S(T) \overset{(f,g)(T)}{\rightarrow} Z_S(T)$.

(3–6) ملاحظة: بواسطة النتيجة (3–5) يمكن الانتقال في البرهان من حالة المخططات الحلقية إلى حالة المجموعات.

(3–7) تعريف: بفرض $f: X \to Y$ ، $g: X` \to Y`$ مورفيزمين بين مخططات حلقية على مخطط حلقي S نعرف المورفيزم $f \times g: X \times_S X` \to Y \times_S Y`$ بأنه المورفيزم $(f \circ p, g \circ q): X \times_S X` \to Y \times_S Y`$ اذ $p: X \times_S X` \to X$ ، $q: X \times_S X` \to X`$ هما مورفيزما الاسقاط للجداء $X \times_S X`$. [4], [5], [6]

(3–8) مبرهنة: من أجل أي مخططين حلقيين X ، Y على مخطط حلقي S ، يتحقق ما يأتي: $X \times_S S \approx X$ و $X \times_S Y \approx Y \times_S X$ [6]

البرهان: (للاختصار سوف نستخدم الرمز $S(T)$ بدلاً من الرمز $S_S(T)$)

لدينا $(X \times_S S)(T) \approx X(T) \times_{S(T)} S(T)$ وذلك من تعريف الجداء.

وأيضاً $X(T) \times_{S(T)} S(T) \approx X(T)$ وذلك ينتج مباشرة من تعريف جداء مجموعتين.

أي انّ $(X \times_S S)(T) \approx X(T)$ ومنه $X \times_S S \approx X$ الآن لدينا $(X \times_S Y)(T) \approx X(T) \times_{S(T)} Y(T)$

لكن $X(T) \times_{S(T)} Y(T) \approx Y(T) \times_{S(T)} X(T)$ ، وذلك ينتج مباشرة من تعريف الجداء للمجموعات وأيضاً لدينا $(Y \times_S X)(T) \approx Y(T) \times_{S(T)} X(T)$

أصبح لدينا $(X \times_S Y)(T) \approx (Y \times_S X)(T)$ ومنه $X \times_S Y \approx Y \times_S X$.

(3 – 9) مبرهنة: بفرض أن المخطط الآتي تبديلي في أجزائه كلّها، وبفرض أن المربع اليميني ديكارتي. عندئذ يكون المخطط اليساري ديكارتياً إذا وفقط إذا كان المخطط الكلي ديكارتياً.

$$\begin{array}{ccccc} X`` & \xrightarrow{g`} & X` & \xrightarrow{g} & X \\ w\downarrow & & v\downarrow & & \square\downarrow \\ S`` & \xrightarrow{f`} & S` & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

البرهان: بحسب النتيجة (3−5) يكفي أن نبرهن صحة المبرهنة من أجل فئة المجموعات $(Sets)$

أي من أجل المخطط السابق حيث المكونات هي مجموعات و تطبيقات بين مجموعات فقط. لدينا $(g,v): X` \to S` \times_S X$ تماثل فرضاً ،و ذلك من المربع اليميني في المخطط السابق. ولدينا أيضاً $X` \times_{S`} S`` = \{(x`, s``) \in X` \times S``; v(x`) = f`(s``)\}$ ، وذلك حسب تعريف جداء مجموعتين.

ولمّا كان $X` \approx S` \times_S X \approx X \times_S S`$ فإن:

$X` \times_{S`} S`` \approx (X \times_S S`) \times_{S`} S`` = \{((x,s`),s``) \in (X \times_S S) \times S``; p(x,s`) = f`(s``), u(x) = f(s`)\}$ اذ $p: X \times_S S` \to S`; (x,s`) \mapsto s`$ مورفيزم الاسقاط القانوني لجداء المجموعات. وبذلك يكون قد تحقق ما يأتي: $((x, f`(s``)), s``) \in (X \times_S S`) \times_{S`} S`` \Leftrightarrow (x,s``) \in X \times_S S``$ وكذلك $((x,s`),s``) \in (X \times_S S`) \times_{S`} S`` \Leftrightarrow (x,s``) \in X \times_S S``$ وبهذا يكون $(X \times_S S`) \times_{S`} S`` \approx X \times_S S``$

4− توظيف مفهوم المخططات الديكارتية في إثبات صحة بعض مبرهنات التماثل

(4 − 1) مبرهنة: $X \times_X (X \times_S Y) \approx X \times_S Y$

البرهان: إن المخطط الآتي تبديلي

$$\begin{array}{ccccc} X\times_S Y & \xrightarrow{id} & X\times_S Y & \xrightarrow{q} & Y \\ p\downarrow & & p\downarrow & \square & \downarrow \\ X & \xrightarrow{id} & X & \longrightarrow & S \end{array}$$

المربع اليميني ديكارتي و كذلك المخطط الكلي. و من ثمّ يكون المربع اليساري ديكارتياً حسب المبرهنة (3–9) أي انّ $X\times_X (X\times_S Y)\approx X\times_S Y$.

(4–2) مبرهنة: $(X\times_S Y)\times_Y Z\approx Z\times_Y (X\times_S Y)\approx X\times_S Z\approx Z\times_S X$ حيث Z مخطط حلقي على Y ومن ثمّ على S من خلال تركيب المورفيزمات.

البرهان: التماثلان الأول والأخير ينتجان من كون الجداء تبديلياً، وذلك حسب المبرهنة (3 − 8).

إن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccccc} X\times_S Z & \xrightarrow{id\times f} & X\times_S Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & \square & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

إن المربع اليميني ديكارتي، و كذلك المخطط الكلي ديكارتي، لذلك يكون المربع اليساري ديكارتياً، وذلك حسب المبرهنة (3 − 9). أي أن $(X\times_S Y)\times_Y Z\approx X\times_S Z$.

(4 − 3) نتيجة: الخاصة التجميعية للجداء: $(X\times_S Y)\times_S Z\approx X\times_S (Y\times_S Z)$

البرهان: من المبرهنة (4 − 2) لدينا $(X\times_S Y)\times_Y (Y\times_S Z)\approx X\times_S (Y\times_S Z)$

وكذلك $(X\times_S Y)\times_Y (Y\times_S Z)\approx (X\times_S Y)\times_S Z$ ومن ثمّ يكون $(X\times_S Y)\times_S Z\approx X\times_S (Y\times_S Z)$.

(4 − 4) مبرهنة: ليكن σ غمراً (immersion). عندئذ يمكن اختصار σ من اليسار.

البرهان: ليكن: $(f,f^{\#}):(X,O_X)\to(Y,O_Y)$ و $(g,g^{\#}):(X,O_X)\to(Y,O_Y)$ مورفيزمين بين مخططين حلقيين، وليكن $\sigma \overset{def}{=} (\sigma,\sigma^{\#}):(Y,O_Y)\to(Z,O_Z)$ غمراً بحيث $(\sigma,\sigma^{\#})\circ(f,f^{\#})=(\sigma,\sigma^{\#})\circ(g,g^{\#})$. عندئذ من تعريف تركيب مورفيزمين يكون $\sigma\circ f=\sigma\circ g$ كتطبيقات مستمرة بين فضاءات طبولوجية، وأيضا σ متباين تعريفا، لذلك يكون $f=g$.

وأيضاً من تعريف تركيب مورفيزمين بين مخططين حلقيين يكون: $f_x^{\#}\circ\sigma_y^{\#}=g_x^{\#}\circ\sigma_y^{\#}$ في التركيبين الآتيين (اذ $y=f(x)$):

$$O_{Z,\sigma(y)} \xrightarrow{\sigma_y^{\#}} O_{Y,y} \xrightarrow{f_x^{\#}} O_{X,x}$$

$$O_{Z,\sigma(y)} \xrightarrow{\sigma_y^{\#}} O_{Y,y} \xrightarrow{g_x^{\#}} O_{X,x}$$

لكن $\sigma_y^{\#}$ غامر تعريفا، ومنه يكون $f_x^{\#}=g_x^{\#}$ أيا كان $x\in X$، فإذا كانت $\alpha\in O_Y(U)$ اذ $U\in\Omega$، فإن $f_U^{\#}(\alpha),g_U^{\#}(\alpha)\in O_X(f^{-1}(U))=O_X(g^{-1}(U))$ ويكون $(f_U^{\#}(\alpha))_x=f_x^{\#}(\alpha_y)=g_x^{\#}(\alpha_y)=(g_U^{\#}(\alpha))_x$ من أجل كل $x\in f^{-1}(U)$ ومن ثمّ $f_U^{\#}(\alpha)=g_U^{\#}(\alpha)$ حسب النتيجة $(1-10)$، وذلك من أجل كل $U\in\Omega$، ومنه $f^{\#}=g^{\#}$. مما سبق ينتج أن $(f,f^{\#})=(g,g^{\#})$.

(4 – 5) مبرهنة: إذا كان $\sigma:S\to T$ غمراً (immersion) عندئذ يكون: $X\times_S Y\approx X\times_T Y$ اذ كل من X و Y مخطط حلقي على S ومن ثمّ على T بواسطة σ.

البرهان: إن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{array}{ccccc}
X\times_T Y & \xrightarrow{q`} & Y & \xrightarrow{id} & Y \\
p`\downarrow & & \eta\downarrow & \square & \downarrow\eta` \\
X & \xrightarrow{\xi} & S & \xrightarrow{\sigma} & T
\end{array}$$

وذلك للأسباب الآتية: بفرض $\eta`=\sigma\circ\eta$، $\xi`=\sigma\circ\xi$، وبفرض $p`$ و $q`$ مورفيزمي الإسقاط القانونيين بالنسبة الى الجداء $X\times_T Y$، وأيضاً p و q مورفيزمي الاسقاط القانونيين بالنسبة الى الجداء $X\times_S Y$ فيكون $\eta`\circ q`=\xi`\circ p`$ تعريفا، ومن ثمّ $\sigma\circ\eta\circ q`=\sigma\circ\xi\circ p`$ لكن σ غمر أي يمكن اختصاره من اليسار حسب المبرهنة (4 – 4)، لذلك يكون $\eta\circ q`=\xi\circ p`$، أي انّ المخطط تبديلي في أجزائه كلّها. لما كان المربع اليميني ديكارتياً وكذلك المخطط الكلي، لذلك كان المربع اليساري ديكارتياً، ومنه $X\times_S Y\approx X\times_T Y$.

References المراجع

1. Schapira, P. 2011. Categories and Homological Algebra. www.math.jussieu.fr. 1 - 21.
2. Barr,M & Wells,C. 1998. Category Theory for Computing Science. Michael Barr and Charles Wells. 121-123.
3. Oosten,J. 2002. Basic Category Theory. Department of Mathematics, Utrecht University, The Netherlands. 1 – 20.
4. Hartshorn,R. 1977.Algebraic Geometry. The American Mathematical Society. 69 - 88.
5. Iitaka,S. 1982. Algebraic Geometry. Springer-Verlag New Work, Inc. 27 - 32. 66 -70.
6. Görtz,U Wedhorn,T. 2010. Algebraic Geometry I. Vieweg + Teubner Verlag | Springer
7. Fachmedien Wiesbaden GmbH. 93 – 98, 543, 544.
8. Atiyah,M & MacDonald,I. 1969. Introduction to commutative algebra. by Watts,J. 25 April 2004. THE FIBRED PRODUCT OF SCHEMES. Department of Mathematics & Statistics, University of Calgary, 2500 University Drive N.W, Calgary, Alberta, Canada, T2N 1N4.