نقطة ابتدائية جديدة لطريقة النقاط الداخلية من أجل البرامج الاحتمالية

علا عبد الرحمن رحمة* د. غصون الجيرودي**

الملخص

في هذه المقالة قدّمت نقطة ابتدائية جديدة لطريقة النقاط الداخلية لحل مسائل البرامج الاحتمالية المتعددة المراحل. في السابق اعتمدت عدة طرائق أخرى لحل مثل هذه المسائل مثل طريقة تفكيك بندر. لقد اقترح عدد من الباحثين استخدام طريقة النقاط الداخلية لحل البرامج الناتجة من المسائل الاحتمالية لأن البرامج الناتجة عن المسائل الاحتمالية أصبحت ضخمة. استخدمت طريقة النقاط الداخلية مسبقاً لحل هذه المسألة اذ كانت احدى أفكارها أخذ شجرة أحداث مخفضة من شجرة المسألة الأساسية وحلها، وأخذ الحل كنقطة ابتدائية للمسألة كاملة. نظراً الى أن اختيار النقطة الابتدائية لطريقة النقاط الداخلية للمسألة المدروسة يلعب دوراً مهماً في سرعة تقارب هذه الطريقة من الحل الأمثل، لذلك قدّمت في هذه المقالة استراتيجية جديدة لاختيار النقطة الابتدائية لطريقة النقاط الداخلية. اذ اعتمدنا على حل السيناريوهات سيناريو تلو الآخر، مع أخذ الحل من المرحلة السابقة، واستخدامه كنقطة ابتدائية للمسألة في المرحلة المدروسة.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الاحتمالية – طريقة النقاط الداخلية – النقاط الابتدائية.

التصنيف الرياضي العالمي (MSC 2010): 90C15

---

* طالبة ماجستير - قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة دمشق– سورية.

** مدرِّسة – قسم الرياضيات– كلية العلوم – جامعة دمشق– سورية.

New starting point in IPM for SP

O. Rahmeh* **Dr. Gh. Aljairody****

Abstract

In this article we will give a new starting point for interior points method to solve multi stage stochastic programming problems. In the past, several other ways were used to solve such that problems like Bender's decomposition. Many researchers have suggested the use of interior points method to solve the programs arising from stochastic problems because that the programs resulting from stochastic problems have become huge. Interior points is used to solve this problem, the idea was to take a discounted events tree from a basic tree and solved it then take the solution as an initial point to whole problem. Since choosing the starting point to the interior points method of the studied problem plays an important role to speed the convergence of this method. So in this article, we will introduce a new technique to give starting point to the interior points method. We will rely on the scenarios solution, scenario after another taking the solution of the previous stage and use it as a starting point in the current problem. In the following sections we will mention a brief overview of the stochastic programming and interior points method and then recall some elementary points to some researchers, and then we will submit the point that we proposing.

Keywords: stochastic programming – interior point method – starting point.

(MSC 2010) :90C15

*Master Student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascuse University, Syria.

**Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascuse University, Syria.

مقدمة:

البرمجة الاحتمالية:

تسمح البرمجة الاحتمالية بدراسة المسائل التي تتضمن الشك وإيجاد الحل الأمثل لها مع الأخذ بالحسبان السيناريوهات المستقبلية الممكنة جميعها. تتشابه نماذج البرمجة الاحتمالية في الاسلوب، ولكن بالإفادة من حقيقة أن التوزيعات الاحتمالية (التي تتحكم بالبيانات) معروفة أو يمكن تقديرها ،يكون الهدف إيجاد طريقة مجدية (أو تقريباً) للحالات الممكنة. جميعها بشكل عام، تصاغ هذه النماذج أولاً ،ثم تحل تحليلياً أو عددياً، من أجل توفير معلومات مفيدة لمتخذ القرار. تستخدم هذه التوزيعات لمحاكاة البيانات غير المعروفة مسبقاً بشكل يقارب المسألة المدروسة.

تعود دراسة البرمجة الاحتمالية إلى Dantzig and Beale عام 1955. كما ظهر مستوى آخر من مسائل البرمجة الاحتمالية المثلى التي تتماشى مع القيود والتي يعود تاريخها إلى Charns وCooper عام 1959. تُمكِّن البرمجة الاحتمالية من نمذجة أوضاع مختلفة، وذلك باستخدام دالة خطية متقطعة أو دالة عامة غير خطية ،وبالإمكان إضافة بعض القيود المطلوب تحقيقها. تدمج البرمجة الاحتمالية بين قوة البرمجة الرياضية مع تقنيات الاحتمالات المتقدمة، للتغلب على مسائل الأمثلية التي تتضمن الشك. طُبِّقت البرمجة الاحتمالية بعدة مجالات منها: الزراعة –الطاقة –الاقتصادية –العسكرية... إلخ.

قسمت نماذج البرمجة الاحتمالية الى قسمين:

- مسائل البرمجة الاحتمالية بمرحلتين.
- مسائل البرمجة الاحتمالية بعدة مراحل.

في مسائل البرمجة الاحتمالية بمرحلتين، يتخذ قرار المرحلة الأولى "هنا والآن" قبيل حل عدم اليقين، في حين تؤجّل قرارات المرحلة الثانية في وضع "الانتظار والترقب" بعد كشف حالات عدم اليقين. الهدف هو إيجاد حل جيد وسطياً في ظل

السيناريوهات جميعها. تُقدم هذه الطريقة طريقة مباشرة لتفسير عدم اليقين، ولكن نماذج البرمجة الاحتمالية (غالباً) ما تتطلب حسابات معقدة لأن حجم نماذجها يزداد أسياً مع زيادة عدد السيناريوهات.

تأخذ مسائل البرمجة الاحتمالية بمرحلتين الشكل، [1]:

$$\min_{x \in R^n} c^T x + E[Q(x,\xi)] \text{ .... } (1)$$ (الدالة الهدف)

$$s.t. \quad Ax = b, x \geq 0$$ (قيود المسألة)

اذ $E[Q(x,\xi)]$ هو التوقع الرياضي، و $Q(x,\xi)$ هي القيمة المثلى لمسألة المرحلة الثانية التي لها الشكل:

$$\min_{y \in R^m} \quad q^T y \text{ .... } (2)$$

$$s.t. \quad Tx + Wy = h, y \geq 0$$

و $\xi := (q,h,T,W)$ هي بيانات مسألة المرحلة الثانية.

تحلّ مسألة المرحلة الثانية أولاً ،وتستخدم القيمة المثلى الناتجة عنها $Q(x,\xi)$ في حل مسألة المرحلة الأولى.

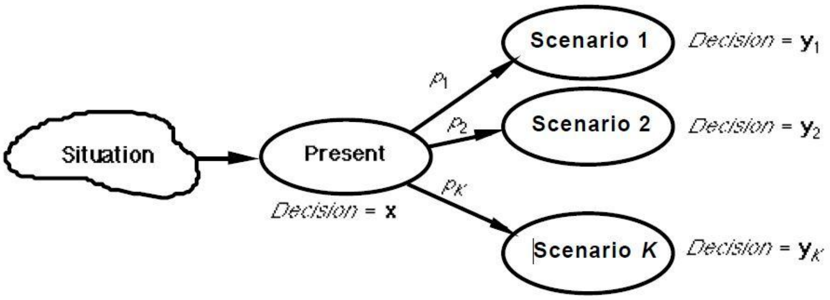
بعض عناصر المتجه ξ أو كلّها عشوائية، والتوقع في مسألة المرحلة الأولى (1) يؤخذ مع مراعاة التوزيع الاحتمالي لـ ξ .

المسألة المرافقة لمسألة المرحلة الثانية (2) هي مسألة برمجة خطية:

$$\max_{\pi} \pi^T (h - Tx) \text{.................................} (3)$$

$$\text{s.t.} \quad W^T \pi \leq q$$

حسب نظرية البرمجة الخطية تكون القيم المثلى للمسائل (2) و(3) متساوية مع بعضها بعضاً، وذلك ما لم تكن المسألتان غير قابلتين للحل، أي انّه بحل المسألة المرافقة الخطية نكون قد حصلنا على حل مسألة المرحلة الثانية ومن ثمّ تنتج عنها القيم المثلى التي نستخدمها في حل مسألة المرحلة الأولى.



الشكل [1] مخطط يمثل شكل البرنامج الاحتمالي بمرحلتين مسألة البرمجة الاحتمالية بمرحلتين بشكل عام لها

$$\min_{x} \quad f_1(x) + E[Q(x,w)] \quad ....(4)$$

اذ $E[Q(x,w)]$ التوقع الرياضي و $Q(x,w)$ هي القيمة المثلى لمسألة المرحلة الثانية التي لها الشكل:

$$\min_{y} \quad f_2(y,w) \quad ....(5)$$

$$\text{S.t} \quad T(w)x + W(w)y = h(w)$$

اذ $f_1(x), f_2(x)$ دوال مستمرة، و x متغير القرار، و h,W,T هي بيانات المرحلة الثانية.

نماذج البرمجة الاحتمالية بمرحلتين يمكن أن تمدد طبيعياً لنماذج متعددة المراحل، في البرمجة المتعددة المراحل المعلومات المجهولة $\xi_T ,..., \xi_1$ تُعطى تدريجياً مع مرور الوقت في T مدة وقراراتنا يجب أن تتوافق مع هذه العملية.

نعدّ أن مسألة المرحلة الأخيرة في البرمجة الاحتمالية المتعددة المراحل تكون، [1]:

$$\min_{x_T \in \chi_T(x_{T-1}, \xi_T)} f_T(x_T, \xi_T) \qquad ....(6)$$

القيمة المثلى لها هي $Q_T(x_{T-1}, \xi_T)$ ،وتعتمد على البيانات ξ_T .

في المرحلة $t = 2,...,T-1$ تصاغ المسألة بالشكل، [1]:

$$\begin{aligned} &\min_{x_t} \quad f_t(x_t, \xi_t) + E\{Q_{t+1}(x_t, \xi_{[t+1]}) | \xi_{[t]}\} \\ &s.t. \quad x_t \in \chi_t(x_{t-1}, \xi_t) \end{aligned} \qquad ....(7)$$

اذ $E[. | \xi_{[t]}]$ هو التوقع الشرطي، و ξ_t المتغيرات العشوائية و $\xi_{[t]}$ ترمز لتأريخ العملية حتى المدة t و x_t متغيرات القرار. تعتمد القيمة المثلى على قرار المرحلة السابقة x_{t-1} وعلى قيم البيانات $\xi_{[t]}$، ويرمز لها بـ $Q_t(x_{t-1}, \xi_{[t]})$. ويجري المتابعة تراجعياً حتى نصل لمسألة المرحلة الأولى:

$$\underset{x_1 \in \chi_1}{Min} \quad f_1(x_1) + E[Q_2(x_1, \xi_2)] \quad ....(8)$$

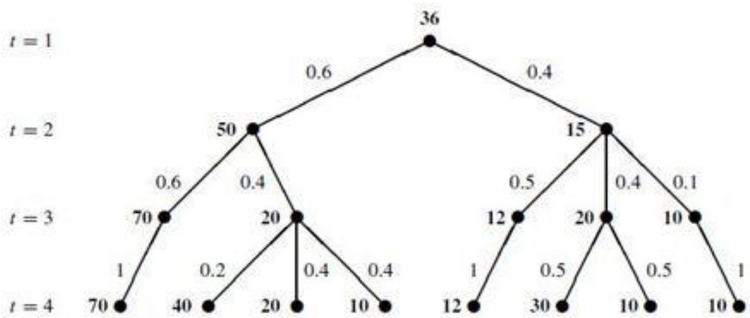
بشكل عام مسألة البرمجة الاحتمالية ذات الـ T مرحلة يمكن أن تكون بالصيغة المتداخلة الآتية، [1]:

$$\underset{x_1\in\chi_1}{Min}\; f_1(x_1)+E\left[\inf_{x_2\in\chi_2(x_1,\xi_2)} f_2(x_2,\xi_2)+E\left[\ldots+E\left[\inf_{x_T\in\chi_T(x_{T-1},\xi_T)} f_T(x_T,\xi_T)\right]\right]\right] \quad (9)$$

بياناتها العشوائية $\xi_1,\ldots,\xi_T$

اذ $x_t \in \Re^{n_t}, t=1,\ldots,T$ هي متغيرات القرار، و $f_t : \Re^{n_t}\times\Re^{d_t} \to \Re$ دوال مستمرة و $\chi_t : \Re^{n_{t-1}}\times\Re^{d_t} \vec{\to} \Re^{n_t}, t=2,\ldots,T$ دوال جزئية قيوسة ومغلقة ،وتكون بيانات المرحلة الأولى المتجه ξ_1 والدالة $f_1 : \Re^{n_1} \to \Re$ والمجموعة $\chi_1 \subset \Re^{n_1}$.

يمكننا تمثيل مسألة البرمجة الاحتمالية المتعددة المراحل بشجرة أحداث



مثال لشكل شجرة أحداث برنامج احتمالي متعدد المراحل اذ انّ كل مستوى في الشجرة يعبّر عن مرحلة من مراحل البرنامج ،وكل مسار يعبّر عن سيناريو من سيناريوهات البرنامج

طريقة النقاط الداخلية:

كتب (Mizuno and Freund في مقالتهما 1996) أن:

طرائق النقاط الداخلية في البرمجة الرياضية من أكثر المجالات المثيرة للاهتمام للبحوث في الأمثلة منذ تطوير طريقة السمبلكس...الخ

غيرت طرائق النقاط الداخلية النظرة الى نظرية البرمجة الرياضية واستخداماتها وحساباتها...الخ

على الرغم من أن طرائق البرمجة الرياضية عدّت بطريقة أو بأخرى بأنها من الخمسينيات ،وتم البحث فيها بنطاق واسع خلال الستينيات (Fiacco and McCormick 1968)، كان لنشر ورقة البحث (لكارماركر Karmarkar 1984) تأثير كبير في وضع طرائق النقاط الداخلية في رأس قائمة أولويات عدد من الباحثين.

من الناحية النظرية أدت البحوث اللاحقة الى تحسين التعقيد الحسابي للبرمجة الخطية (LP) والبرمجة التربيعية (QP) ومسائل التكامل الخطية (LCP) والبرمجة شبه المعرفة (SDP) وبعض مسائل البرمجة المحدبة مقارنة بباقي الطرق المستخدمة حينها خاصةً في المسائل الكبيرة.

إن البرامج الناتجة عن البرمجة الاحتمالية بعدة مراحل لها الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &s.t. \quad h_i(x) \geq 0, \quad i = 1,\dots,m \end{aligned}$$

سنستخدم طريقة النقاط الداخلية لحل هذا البرنامج.

إن طريقة النقاط الداخلية هي طريقة تكرارية، خطواتها بشكل عام هي كالتالي، [6]:

تدخل متغيرات اصطناعية موجبة لتحويل قيود المتباينة جميعها إلى مساواة

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &s.t. \quad h(x) - w = 0, \quad w \geq 0 \end{aligned}$$

تستبدل شروط عدم السلبية بشروط الحاجز في التابع الهدف

$$\min \quad f(x)-\mu\sum_{i=1}^{m}\log(w_i)$$
$$s.t. \quad h(x)-w=0$$

وتدمج قيود المساواة بالدالة الهدف باستخدام مضاريب لاغرانج

$$\min \quad f(x)-\mu\sum_{i=1}^{m}\log(w_i)-y^T(h(x)-w)$$

ثم توضع المشتقات كلّها مساوية للصفر:

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x)-\nabla h(x)^T y=0\\
&-\mu W^{-1}e+y=0\\
&h(x)-w=0
\end{aligned}$$

تعاد صياغة الكتابة بالشكل:

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x)-\nabla h(x)^T y=0\\
&WYe=\mu e\\
&h(x)-w=0
\end{aligned}$$

وتطبق طريقة نيوتن لحساب الاتجاهات $\Delta x, \Delta w, \Delta y$:

$$\begin{bmatrix} H(x,y) & 0 & -A(x)^T \\ 0 & Y & W \\ A(x) & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta w \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) + A(x)^T y \\ \mu e - WYe \\ -h(x) + w \end{bmatrix}$$

هنا $H(x,y) = \nabla^2 f(x) - \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla^2 h_i(x)$ و $A(x) = \nabla h(x)$

تستخدم المعادلة الثانية للحل من أجل Δw .

الناتج نظام كاريش –كون –تاكر(Karush-Kuhn-Tucker) KKT المخفض:

$$\begin{bmatrix} -H(x,y) & A^T(x) \\ A(x) & WY^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) - A^T(x) y \\ -h(x) + \mu Y^{-1} e \end{bmatrix}$$

ويكون:

$$\begin{aligned} x^{(K+1)} &= x^{(K)} + \alpha^{(K)} \Delta x^{(K)} \\ w^{(K+1)} &= w^{(K)} + \alpha^{(K)} \Delta w^{(K)} \\ y^{(K+1)} &= y^{(K)} + \alpha^{(K)} \Delta y^{(K)} \end{aligned}$$

النقطة الابتدائية الجديدة:

إذا كانت النقطة الابتدائية لطريقة النقاط الداخلية للمسألة المدروسة قريبة من الحل الأمثل ،فهذا يؤدي إلى انقاص عدد التكرارات، ومن ثمّ إلى تسريع تقارب طريقة

النقاط الداخلية. في العقد الأخير تم البحث في عدد من المحاولات لتحسين استراتيجيات انتقاء النقطة الابتدائية في طريقة النقاط الداخلية. ومؤخراً اقترحت استراتيجية فك القفل الجديدة من قبل (Grothey and Gondzio 2008). وهذا يستند الى تحليل حساسية اتجاه البحث فيما يتعلق بالنقطة الحالية. كما اقترح (Ferreau، Diehl and Bock 2008) استراتيجية نقطة ابتدائية تعتمد على مجموعة الطرائق التي تستخدم أفكار أمثلة البارامترات.

كما يوجد عدد من المقالات عن النقطة الابتدائية لطريقة النقاط الداخلية منها [7] [8] [9] [11].

استراتيجية النقطة الابتدائية مهمة في حل المسائل المتسلسلة ،اذ انّها تستخدم حل مسألة الحالية كنقطة ابتدائية للمسألة التالية لها، بحيث يكون حل المسألة قريباً من حل المسألة التي تليها. وبهذا تقلل هذه الاستراتيجية 50-60% من عدد التكرارات للوصول الى الحل الأمثل.

اقترح عدد من الباحثين استخدام الحل الأمثل للبرنامج السابق ليكون نقطة ابتدائية للبرنامج التالي (مثل Mitchell and Gondzio وغيرهم). تعدّ هذه الفكرة جيدة جداً لأن الحل الأمثل للبرنامج السابق غالباً ما يكون قريباً جداً من الحل الأمثل للبرنامج الحالي، لكن يا للأسف هذه النقطة الابتدائية (غالباً) ما تكون خارج منطقة الحلول.

في هذه المقالة قدّمت نقطة ابتدائية جديدة للبرمجة المتعددة المراحل، تعتمد على الفكرة السابقة نفسها مع تعديل يضمن للنقطة الابتدائية المختارة من أن تكون ضمن منطقة الحلول. اذ استخدم الحل الأمثل للبرنامج السابق ليكون نقطة ابتدائية للبرنامج الحالي مع تعديل البرنامج الحالي ليضمن بقاء هذه النقطة ضمن منطقة الحلول.

في كل مرحلة من مراحل البرمجة الاحتمالية بعدة مراحل يجب أن يحل برنامج من الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} &\min f_t(x) \\ &s.t. \quad h_{it}(x) \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10) \end{aligned}$$

اذ $i = 1,...,m$

ونظراً الى أن البرامج تحل تراجعياً سيكون البرنامج السابق من الشكل:

$$\begin{aligned} &\min \quad f_{t+1}(x) \\ &s.t. \quad h_{i\ t+1}(x) \geq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(11) \end{aligned}$$

هناك عدد من القيود المشتركة بين البرنامجين (10)، و(11)، وباقي القيود تختلف فقط بالمتغيرات العشوائية، اذ انّ المتغيرات العشوائية لا تؤثر في عدد كبير من قيود البرنامج (10) ومن ثمّ سنعيد صياغة البرنامج (10) بأن نقسم قيوده إلى نوعين ومن ثمّ سيصبح البرنامج من الشكل:

$$\begin{aligned} &\min \quad f_t(x) \\ &s.t. \quad h_{it}(x) \geq 0 \quad ; i \in I \\ &\qquad\ \ h_{it}(x) \geq 0 \quad ; i \in J \end{aligned}$$

اذ I مجموعة الشروط التي لا تحوي المتغيرات العشوائية، و J مجموعة الشروط التي تحوي المتغيرات العشوائية.

سنقوم بتعديل البرنامج (10) إلى البرنامج المكافئ الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_t(x)+\sum_{i\in J} y_i^T h_{it}(x) \\ s.t. \quad & h_{it}(x)\geq 0 \quad ; i\in I \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

اذ y_i هي مضاريب لاغرانج [7].

يعدّ الحل الأمثل للبرنامج (11) نقطة ابتدائية مهمة جداً للبرنامج (10)، لأن الحل الأمثل للبرنامج السابق قريب جداً من الحل الأمثل للبرنامج الحالي. إلا أن الحل الأمثل لـ (11) سيكون خارج منطقة حلول البرنامج (10) وذلك بسبب القيود J . لذلك قمنا بحذف هذه القيود من البرنامج (10) مما جعل النقطة الابتدائية المختارة تحقق القيود المتبقية I ، وبذلك تصبح هذه النقطة ضمن منطقة الحلول. إن حذف قيود من البرنامج يؤدي إلى تغير البرنامج، ولتجنب هذا التغيير أضفنا القيود J إلى دالة الهدف وذلك بالاستعانة بمضاريب لاغرانج، ومن ثمّ حصلنا على البرنامج المكافئ (12). وبذلك حصلنا على نقطة ابتدائية مميزة ضمن منطقة الحلول.

:References المراجع

- Shapiro, A. Dentcheva, D. Ruszczynski, A., Copyright © 2009 by the Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society. Lectures on stochastic programming modeling and theory, p.27.28.42.64.
- Fiacco, A, V. McCormick, G, P., 1968. Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques, Wiley, New York.
- Shahzad, A. Kerrigan, E, C., 2000. A Warm-start Interior-point Method for Predictive Control, Imperial College London.
- Karmarkar, N., 1984. A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica.
- Freund, R, M. Mizuno, S., 1996. Interior point methods: Current status and future directions.
- Wright, S, J., Copyright © 1997. Primal-Dual Interior-Point Methods, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Pisinger, D., 2006. Interior point methods-an introduction. P.9.
- Yıldırım, E, A. Wright, S J., 2002. Warm-start strategies in interior-point methods for linear programming, SIAM Journal on Optimization.
- Colombo, M. Grothey, A., 2009. A decomposition-based warm-start method for stochastic programming.
- Birge, J, R. Louveaux, F., 1997. Introduction to stochastic programming, Springer Series in Operations Research, New York.
- Colombo, M. Grothey, A., 2009. A multi-step interior point warm-start approach for large-scale stochastic linear programming, Technical Report MS-09-007, School of Mathematics, The University of Edinburgh.