مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 39– عدد 3 (2023): 127–136

Damascus University Journal for the Basic Science
Vol 39 No.3 (2023): 127 -136

تمثيلُ زمرةٍ منتهيةٍ على أنواعٍ خاصةٍ من المودولات

رغده عز الدِّين[1] ، د.عبد اللَّطيف هنانو[2]

1 . قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة دمشق

2. باحث في الطاقة الذرية

الملخَّص:

نقدِّم في هذه الورقة العلمية تعريفاً جديداً لتمثيل زمرة منتهية. اعتماداً على أنَّ المودول يعدُّ تعميماً للفضاء الشعاعي، عرَّفنا تمثيل زمرة منتهية G على مودول M_R، الَّذي بدوره يعد تعميماً لمفهوم تمثيل زمرة على فضاءٍ شعاعي منتهي البعد، وقد تم التوصل إلى خواص عديدة لهذا التمثيل فلأجل كل تمثيل T لزمرة منتهية G على مودول M_R،وجدنا أنَّ كل من أساس المودول و $SOC(M)$ يشكلان تمثيلان للزمرة G جزئيان من M، وأثبتنا أنَّ كل تمثيل جزئي من تمثيلٍ خزولٍ تماماً يكون تمثيل خزول تماماً، وأنَّ كل تمثيل خزول تماماً معرَّفاً على مودولٍ آرتيني(يحقق الشرط الأصغري) يكتب على شكلِ مجموعٍ مباشرٍ لتمثيلاتٍ غيرِ خزولةٍ جزئيةٍ منه. بحثنا في مدى تأثير خواص المودول على خاصتي الخزوليَّة والخزوليَّة التَّامة للتَّمثيل المعرَّف عليه. بناءً على ذلك درسنا هذا التمثيل على بعض المودولات الخاصة، وتمكَّنا من إثبات عددٍ من الخصائصِ التي يحققها.

تاريخ الإيداع: 2022/05/25
تاريخ الموافقة: 2022/08/10

حقوق النشر: جامعة دمشق–سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص

CC BY–NC–SA 04

الكلمات المفتاحية: G– مودول، تمثيل خزول، تمثيل خزول تماماً، المودول الضربي، المودول نصف البسيط المتجانس.

رقم التصنيف العالمي للعام 2020: 20F29, 20C99, 16D60

ISSN (online): 2789-6366
http://journal.damascusuniversity.edu.sy/index.php/index/index

A representation of finite group on special modules

Raghda Eizeddin[1] ، Dr. Abdullatef Hanano[2]

1. Department of mathematics- faculty of sciences-Damascus University
2. Energy researcher

Abstract

In this paper we introduced a new definition of a representation of finite group. Depending on that a module is a generalization of vector space, we defined a rep. of finite group G on a module M_R. Which, in turn, prepares a generalization of the concept of representation on finite vector space. Many properties of this rep. are optained. We proved that for every rep. T of a finite group G on a module M_R, each of the radical and sockel of M is a subrepresentation of M_R, every subrepresentation of a completely reducible is also completely reducible, and every completely reducible representation on Artinian module is a direct sum of irreducible subreps of it.

We research in the extent of the effect of properties of the module on the reducibility and the complete reducibility of the rep on it, so we study it on special modules, and We proved many of its properties.

Received :2022/05/25
Accepted:2022/08/10

Copyright:Damascus University- Syria, The authors retain the copyright under a
CC BY- NC-SA

Key words: G- module, Reducibl Rep, Completely Reducible Rep, Multiplication Module, Homogeneous Semisimple Module.

2020- Mathematics Subject Classification : 20F29, 20C99, 16D60.

1. تعاريف ومبرهنات أساسية في المودول:

خلال هذه الدراسة **R** حلقة واحدية، $\mathbf{M_R}$ مودول يميني معرَّف على الحلقة **R**، **S** حلقة الاندومورفزمات للمودول $\mathbf{M_R}$، $\mathbf{N \le M}$ أي **N** مودولاً جزئياً من **M**.

1.1. تعريف (EL-Bast et al., 1998,p.755). ليكن M_R مودولاً معرَّفا على الحلقة R، يُقال أن المودول M ضربي إذا وجد لأجل كل مودول جزئي N منه، مثالي I في الحلقة R يحقق $N = MI$.

1.2. تعريف (Anderson,1992,p.120). ليكن M_R مودولاً. يُسمى تقاطع جميع المودولات الجزئية الأعظمية في M بأساس المودول M ويُرمَّز له بـ $J(M)$.

ملاحظة: في حال كون المودول M_R لايحتوي مودولات جزئية أعظمية، يُصطلح على أنَّ $J(M) = M$.

1.3.تمهيدية (F.Kasch,1982,p.214). ليكن $f: M_R \to M'_R$ تشاكل مودولي. عندئذٍ $f\big(J(M)\big) \subseteq J(M')$

1.4.تعريف (Anderson,1992,p.116). ليكن M_R مودولاً. يقال أن المودول M بسيط (أصغري) إذا كان لا يحوي على مودول جزئي فعلي[1] فيه.

1.5.تعريف (Anderson,1992,p.118). ليكن M_R مودولاً. يُقال أنَّ مجموع المودولات الجزئية البسيطة (الأصغرية) تشكل مودولاً جزئياً من M يدعى$Sockel(M)$، ويرمّز له $Soc(M)$.

1.6. تمهيدية (F.Kasch,1982,p.28) ليكن $M_R \neq 0$ مودولاً منتهي التوليد. عندئذٍ كل مودول جزئي K من M. حيث $K \neq M$ محتوى في مودول جزئي أعظمي في M.

1.7. تمهيدية (F.Kasch,1982,p.28) ليكن M_R مودولاً معرَّفاً على الحلقة R. إنَّ القضايا الآتية متكافئة:

1- كل مودول جزئي من M_R يكتب على شكل مجموع لمودولات جزئية بسيطة فيه.

2- المودول M_R يكتب على شكل مجموع مباشر لمودولات جزئية بسيطة فيه.

3- كل مودول جزئي في M_R يشكل حد مباشر.

1.8. تعريف (F.Kasch,1982,p.191) يدعى المودول M_R نصف بسيط إذا و فقط إذا حقق الشروط المتكافئة الواردة في التمهيدية السابقة.

ليكن $M_{\mathcal{R}}$ مودولاً نصف بسيطاً ولتكن Γ مجموعة جميع المودولات الجزئية البسيطة في $M_{\mathcal{R}}$: $\Gamma = \{N: N \le M, \text{بسيط } N\}$.

عندئذٍ $\cong$[2] تشكل علاقة تكافؤ على Γ، ولتكن $\{\Omega_{j}: j \in J\}$ مجموعة صفوف التكافؤ(صفوف التماثل). ومنه: $\Omega_{j_0} \cap \Omega_{j_1} = \emptyset$ لأجل $j_0, j_1 \in J$ و $j_0 \neq j_1$.

1.9. تعريف (F.Kasch,1982,p.193).المودول الجزئي $B_{j} = \sum_{N\in\Omega_{j}} N$ من المودول نصف البسيط M يدعى مودولاً جزئياً (عنصراً) متجانساً فيM.

ومنه يقال إن المودول M_R نصف بسيط متجانس إذا كُتِبَ على شكلِ مجموعٍ مباشرٍ لمودولاتٍ جزئيةٍ بسيطةٍ متماثلةٍ.

وبالتَّالي يكون المودول نصف بسيط غير متجانس إذا كُتِبَ على شكلِ مجموعٍ مباشرٍ لمودولاتٍ جزئيةٍ بسيطةٍ غير متماثلة.

1.10. مبرهنة.(F.Kasch,1982,p.194) ليكن M_R مودولاً نصف بسيطاً، وليكن B_{j} مودولاً جزئياً متجانساً في M. عندئذٍ يتحقق:

1- إذا كان N مودولاً بسيطاً جزئياً في B_{j}، فإنَّ $N \in \Omega_{j}$.

2- $M = \bigoplus_{j\in J} B_{j}$.

---

[1] يقال أن N مودول جزئي فعلي من M إذا كان $N \neq 0$ و $N \neq M$.

[2] f تماثل $\forall N, P \in \Gamma;\ N \cong P \iff \exists f: N \longrightarrow P;$

2. تمثيل زمرة منتهية **G** على فضاء شعاعي **V**:

2.1 تعريف (R.Keown,1975,p.67). لتكن $(G,\cdot)$ زمرة، وليكن $V(F)$ فضاءاً شعاعياً منتهي البعد على حقل F، يُعرَّف تمثيل زمرةٍ منتهية G على الفضاءV بأنَّه تشاكل زمري:

$$T : G \longrightarrow GL(V)$$
$$g \longrightarrow T_g : V \longrightarrow V$$

حيث $_g$ هو مؤثر خطي، يكفي لتعيينه معرفة العناصر $T_g\left(v_i\right)_{i=1,2\dots n}$ حيث $\left(v_i\right)_{i=1,\dots n}$ قاعدة فيV .

أي يمكننا القول إنَّ تمثيل زمرةٍ على فضاء شعاعي ما هو إلا تأثير تلك الزمرة على الفضاء الشعاعي.

2.2 تعريف (Benjamin,2011,p.15).ليكن $T: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً للزمرة G على الفضاء V، وليكن W فضاءاً جزئيا في V، يقال أنَّ W، هو G− فضاء جزئي في V، إذا تحقق : $\forall g \in G \quad T_g(W) \subseteq W$

.

2.3 تعريف (Benjamin,2011,p.17). ليكن $T: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً للزمرة G على الفضاء V، يقال إنَّ التمثيل T خزول إذا وجد في V، G− فضاء جزئي فعلي، وإلا يقال إن V غير خزول. يلاحظ أنَّ كل تمثيل من الدرجة الأولى (أي $\dim(V) = 1$) هو تمثيل غير خزول.

2.4 تعريف (Victor,1999,p.111). ليكن $T: G \longrightarrow GL(V)$ تمثيلاً للزمرة G على الفضاء V، يقال أنَّ التَّمثيلT خزول تماماً، إذا وجد لأجل كلِّ G-فضاءٍ جزئي من T مثل W، G- فضاء جزئي U بحيث يكون $V = U \oplus W$.يتضح من ذلك، إذا كان T تمثيلاً خزولاً للزمرة G على فضاءٍ شعاعي V، فهو خزول تماماً.

3. تمثيل زمرة منتهية **G** على مودول $\mathbf{M_R}$:

بما أنَّ المودول يعتبر تعميماً للفضاء الشعاعي، فإننا سنعتبر الزمرة G تؤثر على المودول، وبالتالي يمكننا تعريف تمثيل الزمرة G على مودول ما M_R .

3.1. تعريف. نعرِّف تمثيل الزمرة G على مودول ما.M_Rبأنه تشاكل زمري:

$$T: G \longrightarrow Aut(M_R)$$
$$g \longrightarrow T_g : M_R \longrightarrow M_R$$

حيث T_g تماثل مودولي، أي تم بناء تمثيل زمرة G في زمرة التماثلات لـ M_R.

3.2. تعريف. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M_R)$ تمثيلاً للزمرة G على المودول M_R، وليكن N مودولاً جزئياً في $M_{\mathcal{R}}$، نقول أنَّ N هو G− مودول جزئي في M إذا تحقق

$$\forall g \in G\ ,\quad T_g \in Aut(M_R) \quad T_g(N) \subseteq N$$

في هذه الحالة يمكن بناء تمثيل للزمرة **G** انطلاقاً من التمثيل **T** يدعى التمثيل الجزئي $\mathbf{T_N}$.

تنويه: يمكن القول التمثيل $_R$ بدلاً من قولنا التمثيلT، والتمثيل الجزئي N بدلاً منT_N.

3.3. مبرهنة. ليكن M_R مودولاً. وليكن N مودولاً جزئياً من M، عندئذٍ الشرط الّلازم والكافي ليكون N هو G− مودول من M أن يتحقق $T_g(N) = N$ وذلك أياً كان $T_g \in Aut(M)$.

الاثبات لزوم الشرط. لنفرض أن N هو G− مودول أي $T_g(N) \subseteq N$ لأجل كل $T_g \in Aut(M)$. وبما أنَّ $_g^{-1} \in Aut(M)$ إذاً $_g^{-1}(N) \subseteq N$ وبالتالي $N \subseteq T_g(N)$ ومنه $_g(\ ) = N$.

كفاية الشرط . واضح

3.4. مبرهنة. ليكن M_R مودولاً. عندئذٍ:

1− إذا كان A و B، G− مودولين جزئيين من M. فإنَّ كل من $(A + B)$ و $(A \cap B)$ يشكلان G− مودولين جزئيين من M.

2- إذا كان A و B مودولين جزئيين من M حيث $A \subseteq B$، عندئذٍ إذا كان A هو G- مودول جزئي من B، و Bهو G- مودول جزئي من M، فإنَّ A يكون G- مودول جزئي من M.

الاثبات.

1- إنَّ $A + B = T_g(A) + T_g(B) = T_g(A + B)$ وذلك أياً كان $T_g \in Aut(M)$ كون كل من A و B يشكلان G- مودولين من M. إذاً $A + B$ هو G- مودول من M. لنبرهن أنَّ $A \cap B$ هو G- مودول من M. ليكن $x \in A \cap B$ إذاً $x \in A$ و $x \in B$ ومنه لأجل كل $T_g \in Aut(M)$ يتحقق $T_g(x) \in A$ و $T_g(x) \in B$ ومنه $T_g(x) \in A \cap B$ إذا $T_g(A \cap B) \subseteq A \cap B$.

2- بما أنَّ B هو G- مودول من M فإنَّ $T_g(B) = B$ لأجل كل $T_g \in Aut(M)$. وبما أن A هو G- مودول من B عندئذٍ $f_g(A) = A$ لأجل كل $f_g \in Aut(B)$.

ليكن $h_g \in Aut(M)$، عندئذٍ مقصور h_g على B والذي سوف نرمِّز له $h_g|_B: B \longrightarrow M$ هو تشاكل متباين وبما أنَّ $h_g(B) = B$ نجد أنَّ $h_g|_B: B \longrightarrow B$ هو تماثل للمودول B، أي $h_g|_B \in Aut(B)$ وهذا يبين أنَّ $h_g|_B(A) = h_g(A) = A$ وذلك لأجل كل $h_g \in Aut(M)$ أي أنَّ A هو G-مودول من M.

3.5. تعريف. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M_R)$ تمثيلاً للزمرة G على المودول M_R، نقول عن التمثيل T إنَّه خزول إذا وجد في M_R -G مودولاً جزئياً فعلياً. وفي غير ذلك نقول إنَّ التَّمثيلT غير خزول. بتعبير آخر، التمثيل غير الخزول هو التمثيل الذي لا يحتوي تمثيلاً جزئياً منه.

يُلاحظ أنَّ التمثيل المعرَّف على مودول بسيط هو تمثيل غير خزول.

3.6. تعريف. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M_R)$ تمثيلاً للزمرة G على المودول M_R،نقول عن التمثيل T إنَّه قابل للتحليل إذا كتب على شكل مجموعٍ مباشرٍ لـ -G مودولين جزئيين منه.

3.7. تعريف. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M_R)$ تمثيلاً للزمرة G على المودول M_R، نقول إنَّ التَّمثيل T خزول تماماً إذا كان لأجل كل -Gمودول جزئي من M_R مثل A، يوجد -G مودول جزئي B بحيث يكون $M = A \oplus B$.

وعلى خلاف مفهوم تمثيل زمرة على فضاءٍ شعاعي، ليس بالضرورة أن يكون كل تمثيل لزمرة G على مودول M_R خزول هو تمثيل خزول تماماً، وهذا يعتبر أحد أهم الفوارق الأساسية بين مفهوم تمثيل زمرة على فضاء شعاعي ومفهوم تمثيل زمرة على مودولM_R. مثالاً على ذلك: لتكن $G = U(10)$، وليكن المودول $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$ عندئذٍ التشاكل الزمري:

$$T: G \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}})$$
$$g \longrightarrow T_g: \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$$
$$T_g(x) = (x.g) \bmod 4$$

تمثيلاً للزمرة G على المودول $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$، نلاحظ التمثيل T خزول لأنَّ $N = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ هو -G مودول جزئي في M، لكن T ليس خزول تماماً.

فيما يلي نعطي أمثلة نموذجية لتمثيلات جزئية خاصة بناءً على بعض المودولات الجزئية الخاصة في المودول.

3.8. مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M_R)$ تمثيلاً للزمرة G على مودول M_R، عندئذ $J(M)$ يشكل تمثيلاً جزئياً للزمرة G من التمثيلM_R.

الاثبات. بتطبيق المبرهنة (1.3) لأجل $M' = M$، وكون $\mathrm{Aut}(M) \subseteq \mathrm{End}(M)$ نجد

$T_{g}\big(J(M)\big) \subseteq J(M)$ و ذلك أياً كان $T_{g} \in \mathrm{Aut}(M)$ و $g \in G$. إذاً $J(M)$ هو G- مودول جزئي من M، ومنه يمكن بناء تمثيل للزمرة G على $J(M)$ انطلاقا من التمثيل T.

3.9 مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودول M_R، عندئذ $Soc(M)$ يشكل تمثيلاً جزئياً للزمرة G من التمثيل M_R.

الاثبات. ليكن $Soc(M) = \sum_{i\in I} N_i$، حيث N_i مودول جزئي أصغري (بسيط) في M، $\forall g \in G,\ T_{g}\big(Soc(M)\big) = T_{g}\left(\sum_{i\in I} N_i\right) \subseteq \sum_{i\in I} T_{g}(N_i)$، وليكن N مودول جزئي من M بحيث $A \subseteq T_{g}(N_i)$، عندئذٍ فإنَّ $T_{g}^{-1}(A) \subseteq N_i$، وبما أنَّ N_i بسيط، إذاً إما $T_{g}^{-1}(A) = N_i$ أو $T_{g}^{-1}(A) = 0$.

- إذا كان $T_{g}^{-1}(A) = N_i$ فإنَّ $A = T_{g}(N_i)$
- وإذا كان $_{g}^{-1}(\ \ ) = 0$ فإنَّ $A = 0$.

ومنه $_{g}(N_i)$ بسيط في M.أي $T_{g}(N_i) \in Soc(M)$. ومنه $T_{g}\big(Soc(M)\big) \subseteq \sum T_{g}(N_i) \subseteq Soc(M)$ ومنه $Soc(M)$ هو G- مودول جزئي من M. فهو تمثيل للزمرة G جزئي من التمثيل M.

3.10. مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ تمثيلاً خزولاً تماماً للزمرة G على مودولٍ M_R، عندئذٍ كل $G-$ مودول جزئي في M_R يكون خزول تماماً.

الاثبات. ليكن M_1 هو $G-$ مودول جزئي في M_R، وليكن A هو $G-$ مودول جزئي من M_1، ولنبرهن على وجود $G-$ مودول جزئي من M_1 مثل Bبحيث يكون $M_1 = A \oplus B$. بما أنَّ A هو $G-$ مودول جزئي من M_1 فهو $G-$ مودول جزئي من M حسب المبرهنة (3.4)، وبالتالي يوجد $G-$ مودول جزئي، L من M بحيث $M = A \oplus L$، كونT خزول تماماً. لنأخذ $B = M_1 \cap L$. فنجد أنَّ B هو $G-$ مودول من M_1 حسب (3.4)، كما أنَّ $M_1 = A \oplus B$.

أي يمكن القول أن كل تمثيل جزئي من تمثيل خزول تماماً هو خزول تماماً.

3.11. مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ تمثيلاً خزولاً تماماً للزمرة G على مودولٍ M_R أرتيني (يحقق الشرط الأصغري)، عندئذٍ M يكتب على شكل مجموع مباشر لـ $G-$ مودولاتٍ غير خزولةٍ جزئيةٍ من M.

الاثبات. ليكن A هو $G-$ مودول جزئي من M، كونT خزول تماماً إذاً يوجد $G-$ مودول جزئي B من M حيث: $M = A \oplus B$، نميز الحالات الآتية:

1- A و B غير خزولين، يتم المطلوب.

2- B غير خزول، و A خزول. عندئذٍ يوجد في A، $G-$ مودول جزئي مثل L و بتطبيق المبرهنة (3.10) نجد A خزول تماماً، أي يوجد في A، $G-$مودول جزئي L' حيث $A = L \oplus L'$، عندئذٍ $M = B \oplus L \oplus L'$، ويتم المطلوب إذا كان كل من L و $\grave{L}$ غير خزول. و إلا فإنَّ L و L' خزولين تماماً وكل منهما يكتب على شكل مجموع مباشر لـ $G-$ مودولين جزئيين، نتابع على هذا النحو، وبعد عدد منتهٍ من الخطوات، كون M آرتيني (يحقق الشرط الأصغري)، نجد $A = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \ldots\ldots L_n$، حيث $L_{i=1,2,\ldots,n}$ يشكل $G-$ مودول غير خزول جزئي من M. ومنه$M = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \ldots\ldots \oplus B$

3- A . و B خزولين. تناقش خزولية كل من A و B كما ورد في 2.

فيما يلي نورد دراسة لبعض المودولات الخاصة التي لأجلها يتحقق، أي تمثيل للزمرة G معرّف عليها يكون تمثيل خزول، ومودولات يكفي ليكون أي تمثيل معرَّف عليها هو تمثيل خزول أن تكون مودولات ليست بسيطة، فهي تحقق أي مودول جزئي منها يشكل تمثيلاً جزئياً للزمرة G انطلاقاً من التمثيل المعرَّف عليها.

3.12. مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودولٍ M_R منتهي التوليد، عندئذٍ إذا كان $J(N) \neq 0$ فالتمثيل T يكون خزول.

الإثبات: بما أن M منتهي التوليد، حسب التمهيدية (1.6) يوجد في M_R مودولاً جزئياً أعظمياً واحداً على الأقل، أي $J(M) \neq M$، إذاً $J(M)$ هو $G-$ مودول فعلي في M_R، فإنَّ T خزول.

3.13 مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودولٍ $M_R \neq 0$. إذا وجد لأجل كل عنصر $m \in M_R$ و $T_{g} \in Aut(M)$، عنصر $r \in R$ يحقق $T_{g}(m) = mr$، عندئذٍ التمثيل T خزول إذا وفقط اذا كان M ليس بسيطاً.

الإثبات. ليكن N مودولاً جزئياً فعلياً في M، إذاً لأجل كل عنصر $n \in N$ و $T_{g} \in Aut(M)$، يوجد $r \in R$ بحيث يكون $T_{g}(n) = nr$

أي $NR = T_{g}(N) \subseteq N$، ومنه Nهو $G-$ مودول جزئي فعلي في M_R، إذاً T خزول.

3.14. مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودولٍ M_R. حيث M_R مودول ضربي، عندئذٍ القضايا الأتية صحيحة:

1- كل مودول جزئي من Mيكون $G-$ مودول جزئي.

2- إذا كان M ليس بسيطاً، عندئذٍ التمثيل يكون T خزول.

الإثبات.

1- ليكن N مودولاً جزئياً من M، عندئذٍ يوجد مثالي I في Rيحقق $N = MI$ ، فيكون $T_{g}(N) = T_{g}(MI) = T_{g}(M)I \subseteq MI = N$. أي N هو $G-$مودول جزئي في M.

2- ليكن B مودولاً جزئياً فعلياً حيث $B \neq 0$ و $B \neq M$، إذاً حسب (1) Bهو -G مودول جزئي فعلي في M_R، إذاً T خزول.

ليكن M_R مودولاً معرَّفاً على الحلقة R، وليكن $T_{g} \in Aut(M)$. والمودول الجزئي N من M. $T_{g}^{-1}(N) = \{m \in M: T_{g}(m) \in$

$M\}$، يلاحظ $T_{g}\left(T_{g}^{-1}(N)\right) = N$، ولأجل المودولين الجزئيين $N \subseteq L$ يتحقق $T_{g}^{-1}(N) \subseteq T_{g}^{-1}(L)$. لأجل أي عدد حقيقي n سنرمز $(T_{g}^{n})^{-1}(N)$ بالرمز $_{g}^{-n}(N)$. حيث$\{m \in M: T_{g}^{n}(N) \in N\} = (\ \ )T_{g}^{-n}$. 3.15. مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودولٍM_R. حيث M_R مودول آرتيني و مرتَّب كليًّا[1]، عندئذٍ القضايا الآتية محققة:

1- كل مودول جزئي من M يكون $G-$ مودول جزئي.

2- إذا كان M_R ليس بسيطاً، التمثيل T يكون خزول

الاثبات.

1- ليكن L مودول جزئي في M. إذا كان $L = 0$ أو $L = M$ يتم المطلوب. لنفرض جدلاً أنَّ L مودول جزئي فعلي يحقق $T_{g}(L) \not\subseteq L$ لأجل كل $g \in G$، بالتالي$L \subseteq T_{g}(L)$ عندئذٍ .... $L \subseteq T_{g}(L) \subseteq T_{g}^{2}(L)$، إذا كان $L \subseteq T_{g}^{-1}(L)$ عندئذٍ $L \subseteq T_{g}\left(T_{g}^{-1}(L)\right) \subseteq T_{g}(L)$، وهذا يناقض الفرض إذاً $T_{g}^{-1}(L) \subseteq L$ وبالتالي تتكون لدينا السلسلة المتناقصة $L \supseteq$ $T_{g}^{-1}(L) \supseteq T_{g}^{-2}$، وبالتالي يوجد عدد موجب n يحقق $T_{g}^{-n}(L) = T_{g}^{-(n+1)}(L)$ ، وبما أن $T_{g}^{n+1}(L)$ تماثل فينتج لدينا $L = T_{g}^{n+1}\left(T_{g}^{-(n+1)}(L)\right) = T_{g}^{n+1}\left(T_{g}^{-n}(L)\right) = T_{g}(L)$، وهذا يناقض الفرض إذاً L هو $G-$ مودول.

2- بما أن M ليس بسيطاً، M بحوي على مودول فعلي جزئي وليكن N، حسب (1)، N يكون $G-$ مودول فعلي في M، إذاً M خزول.

3.16. مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودولٍ $M_R = M_1 \oplus M_2$، إذا كان $Hom(M_1, M_2) = 0$. عندئذٍ المودول M_1 يكون $G-$ مودول من M.

الإثبات لنفرض أنَّ $Hom(M_1, M_2) = 0$ ولنثبت أنَّ M_1 هو $G-$ مودول. ليكن $\pi_2: M \longrightarrow M_2$ الإسقاط القانوني وليكن $i_1: M_1 \longrightarrow M$ الإحتواء القانوني وليكن $T_{g} \in Aut(M)$عندئذٍ

[1] M_R مرتب كلياً أي لأجل أي مودولين جزئيين منه A و B: إما $A \subseteq B$ أو $B \subseteq A$.

وذلك $T_g(M_1) \subseteq \pi_1\left(T_g(M_1)\right) + \pi_2 T_g\left(i_1(M)\right) = \pi_1\left(T_g(M_1)\right) \subseteq M_1$

لأنَّ $\pi_2 T_g\left(i_1(M)\right) \in Hom(M_1, M_2) = 0$، ومنه M_1 هو $G-$ مودول جزئي من M.

تعد المودولات نصف البسيطة واحداً من أهم أنواع المودولات، نظراً للخواص المهمة الّتي تحققها. لذلك خصصنا البند الرابع لنبين مدى تأثير هذا النوع من المودولات على خزوليَّة وعدم خزوليَّة التمثيلات المعرَّفة عليها، زد على ذلك الخزوليَّة التَّامة نظراً لكونها تحقق كل مودول جزئي فيها هو حد مباشر.

4. تمثيل زمرة منتهية G على مودول نصف بسيط:

خلال هذه الدراسة M_R مودول نصف بسيط منتهي.

4.1 مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودولٍ M_R.عندئذٍ القضايا الآتية صحيحة:

1- إذا كان $_R$ نصف بسيط متجانس. عندئذٍ التَّمثيل T غير خزول.

2- إذا كان M_R نصف بسيط غير متجانس. عندئذٍ التَّمثيل T خزول.

الإثبات:

1- ليكن M_R مودول نصف بسيط متجانس. عندئذٍ $_R = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ، حيث $M_i \cong M_j$ لأجل كل $i, j \in I$. ليكن $f \in$ $Hom(M_j, M_i)$ عندئذٍ إما $Ker(f) = 0$ أو $Ker(f) = M_j$ و إما $im(f) = 0$ أو $im(f) = M_i$، كون كل من M_i و M_j مودولات بسيطة. إذاً إما f تماثل عندما $Ker(f) = 0$ و $im(f) = M_i$، أو $f = 0$ عندما $Ker(f) = M_j$ و $im(f) = 0$. وبما أنَّ f متجانس إذاً $f \neq 0$ ومنه $Hom\left(M_j, M_i\right) \neq 0$. ليكن $Pr_i \; _g i_j \in Hom\left(M_j, M_i\right) \neq 0$، ومنه $Pr_i T_g(M_j) \neq 0$ أي $T_g(M_j) \subseteq M_i$، إذاً المودول M_j ليس $G-$ مودول من M. وبالحالة العامة لأجل أي مودول جزئي U من M إنّ $M = U \oplus (\bigoplus_{i\in I} M_i)$ ومنه $M = (\bigoplus_{i\in J} M_i) \oplus (\bigoplus_{i\in I} M_i)$ حيث $U \cong M / \bigoplus_{i\in J} M_i \cong \bigoplus_{i\in K} M_i$، يُلاحظ أنَّ $Hom(U, \bigoplus_{i\in I} M_i) \neq 0$ أي U ليس $G-$مودول، ومنه التمثيل T غير خزول.

2- ليكن M_R مودولاً نصف بسيطاً غير متجانس. عندئذٍ $M_R = \bigoplus_{i\in I} M_i$، حيث $M_i \ncong M_j$ لأجل كل $i, j \in I$. ليكن $f \in \mathcal{H}om\left(M_i, M_j\right)$،إذاً إما f تماثل أو $f = 0$. وكون $_R$ نصف بسيط غير متجانس، إذاً $f = 0$. ومنه$Hom\left(\;\; _i, M_j\right) = 0$. إذاً حسب المبرهنة (3.16) يكون المودولM_i $G-$مودول من M إذاً التمثيل T خزول.

4.2 مبرهنة. ليكن $T: G \longrightarrow Aut(M)$ تمثيلاً للزمرة G على مودولٍ M_R نصف بسيطاً عندئذٍ التمثيل T يكون خزول تماماً.

البرهان. ليكن $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$، حيث N_i مودولات بسيطة جزئية في M. لنميز الحالات الآتية:

1- إذا كانت المودولات N_i متماثلة مثنى مثنى، عندئذٍ المودولM يكون نصف بسيط متجانس. إذاً Tغير خزول حسب المبرهنة (4.1)، ومنه التمثيل T خزول تماماً حيث $M = M + 0$.

2- إذا كانت المودولات N_i غير متماثلة مثنى مثنى، عندئذٍ المودول M يكون نصف بسيط غير متجانس، عندئذٍ حسب المبرهنة (4.1) التمثيل T خزول وكل مودول N_i هو $G-$ مودول. إذاً كل $G-$ مودول هو حد مباشر، ومتمم N_i يكتب بالشكل $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ وهو $G-$ مودول (لأنه مجموع لـ $G-$ مودولات) إذاً M خزول تماماً.

3- إذا كانت المودولات N_i ليست جميعها متماثلة مثنى مثنى، عندئذٍ حسب المبرهنة (1.10) يمكن كتابة M بالشكل $M = \bigoplus_{j\in J} B_j$، حيث $B_j = \bigoplus_{i\in \Omega_I} N_i$، لأجل N_j متماثلة مثنى مثنى، إذاً B_i مودولات غير متماثلة جزئية منM. وكل مودول B_i يكون $G-$ مودول حسب المبرهنة (3.16). إذاً M خزول تماماً.

<u>مثال</u>: نلاحظ أنَّ المودول $M = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ هو مودول نصف بسيط متجانس وأي تمثيل T معرَّف عليه يكون غير خزول حيث $Hom\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right) \neq 0$، و $Hom(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}) \neq 0$. والمودول $N = (\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}) \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ مودول نصف بسيط غير متجانس فيه $\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right) \oplus 0$ هو $G-$ مودول جزئي في N. حيث $Hom\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) = 0$ إذاً أي تمثيل T معرَّف على N خزول

المراجع العلمية:

[1]- El- Bast, and smith F. (1988). Multiplication Modules, comm in Algebra 16.(755-779).
[2]- Anderson,Frank.W,and Fuller,Kent.R.(1973).Rings And Categorise of modules. New York. Springer. 385.
[3]- Kasch.F.(1982). Modules and Rings. London. Academic press.384.
[4]- R.Keown.(1975). An Introduction to Group representation Theory. Academic press.331.
[5]-S. Benjamin. (2011). Representation Theory of finite Group. Springer. 155.
[6]- Hill,Victor.(1999).Groups and Characters.USA. Chapman & Hall. 239.
[7]- Bartel,A.(2016). Introduction to representation theory of finite groups.
[8]- Casselmam,B. (2012). Representation of finite groups. University of British Columbia..
[9]−Ananthnarayan.H.(2021). Representation Theory of finite group.indian institute of technology Bombay. (160)