Damascus University Journal
for the Basic Sciences
Vol 39 No.1 (2023): 50-63

مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية
مجلد 39- عدد 1 (2023): 50-63

بُنية جبرية في معالجة الصورة الرقمية

محمد بكرو[1] ريما القمحة[2] قصي كنفاني[3]

[1] **طالب دكتوراه، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.**

[2] **أستاذ مساعد، قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة دمشق، سورية.**

[3] **أستاذ مساعد، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، جامعة دمشق، سورية.**

الملخص

تُعد آلية استخلاص المعلومات من قواعد المعطيات المختلفة، مجالاً خصباً للباحثين ومثيراً للاهتمام بالمجالات التطبيقية، ونتيجة للاعتماد المتزايد على البيانات البصرية (صور وفيديوهات) يُعمل على نشر سلسلة أبحاث رياضية في تبسيط وتجريد الصور الرقمية. تأتي هذه الورقة البحثية لتقديم بُنيةً جبرية في دراسة ومعالجة عناصر الصورة الرقمية E_M والتي تم طرحها سابقاً، للوصول إلى جبر الصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$. كما قدمت مجموعة من المبرهنات والعلاقات الرياضية، لتساهم بذلك بإعطاء نظرة تجريدية عن مكونات الصورة الرقمية ومعالجتها.

الكلمات المفتاحية: بنية جبرية، الصور الرقمية، معالجة الصورة، عنصر بسيط، عنصر مركب، درجة عنصر.

التصنيف الرياضياتي AMS (2020): 94A08, 03G27.

حقوق النشر: جامعة دمشق –سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص
CC BY-NC-SA 04

ISSN (online): 2789-6366
http://journal.damascusuniversity.edu.sy/index.php/index/index

Algebraic Structure in Digital Image Processing

M. Bakro[1] R. Al-Kamha[2] Q. Kanafani[3]

[1] PhD student, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria.
[2] Professor, Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Damascus University, Syria.
[3] Professor, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Damascus University, Syria.

Abstract

The mechanism of extracting information from different databases is a fertile field for researchers and an interesting field of application. Due to the increasing reliance on visual data (images and videos), a series of mathematical researches has been published to simplify and abstract digital images. This paper is aimed to provide an algebraic structure to the study and processing of the elements of digital images E_M, which was previously presented, and to reach to the algebra of digital image (E_M ,$\boxplus$,$\boxminus$, $\emptyset$). It has also presented a set of theorems and mathematical relations, giving an abstract

view of the components of digital images and their processing.

Copyright: Damascus University- Syria, The authors retain the copyright under a CC BY- NC-SA

Keywords: Algebraic Structure, Digital Images, Image Processing, Simple Element, Complex Element, Grade Element.

Mathematical Subject Classification 2020: **94A08, 03G27.**

1. مُقدمة (Introduction):

من المثير للاهتمام، أن الصورة الرقمية بأشكالها وتنسيقاتها المتنوعة، والتي أضحت ركناً أساسياً وهاماً في مختلف مناحِ الحياة (طب، هندسة، إعلام، ....). عبارةٌ عن مصفوفة أو مجموعة مصفوفات متداخلة، تحوي بداخلها على معلومات الصورة الرقمية بشكل منظم وبتنسيقات مختلفة (Gonzalez & Woods, 2006, p. 977). هنا تأتي أهمية الاستمرار بنشر الأبحاث الرياضية وبخاصة الجبرية في إيجاد تمثيلات وتوصيفات جبرية جديدة لمصفوفات الصور الرقمية بما يتوافق مع خواصها الفيزيائية والتطبيقية، تُمكن الحاسوب مزيداً من الفهم والإدراك للصور الرقمية.

تمّ سابقاً طرح تمثيل جبري لعناصر الصورة الرقمية (Bakro et al., 2019) من خلال تقسيم الصورة الرقمية (المصفوفة) إلى مجموعة عناصر وفق مقاربة جبرية، بالاعتماد على تبسيط مفهوم تحديد الحواف في معالجة الصور الرقمية؛ للوصول إلى إيجاد علاقات رياضية بين هذه العناصر. كما طُرح تمثيلًا رياضيًا جديدًا لعناصر الصورة الرقمية في شكل مجموعات نتروسوفكية (Bakro et al., 2020, p. 12)، وهي مجموعات جزئية من مجموعة عناصر مصفوفة الصور الرقمية (PNS)، بالاعتماد على المفهوم النتروسوفكي؛ للوصول إلى مجموعة من العلاقات والقوانين الناظمة، والتي تربط وتقارن بين عناصر الصورة الرقمية (PNS)، حيث تُوصِل إلى العديد من المبرهنات والنتائج الرياضية لحساب المسافة والاختلاف بين مجموعتين نتروسوفكيتين. أيضاً قُدِم (Bakro et al., 2021, p. 10) طريقة رياضية في تحويل القيم الكلاسيكية لعناصر مصفوفات الصور الرقيمة إلى قيم نتروسوفكية والتي ساعدت فيما بعد في إيجاد فلاتر نتروسوفكية (مصفوفات) تسهم في تنقية الصور الرقمية.

من أشهر الباحثين في مجال الدراسات الجبرية الخاصة بمعالجة الصور الرقمية البروفسور الأمريكي (Ritter) من جامعة ويسكونسن–ماديسون الأمريكية والذي نشر عدة أبحاث رياضية فيما يخص رؤية الحاسوب والعمليات الحسابية والهندسية في معالجة الأشكال داخل الصورة الرقمية (Wilson & Ritter, 2000, p. 425). كما قدم الباحثان الفرنسيان (Serra & Soille, 2012, p. 394) مجموعة من العمليات الرياضية التي تؤثر على الأشكال داخل الصورة الرقمية، باستخدام مصفوفة مختارة تدعى عنصر البناء (Structuring Element)، تحت مسمى المورفولوجي الرياضي (Mathematical Morphology) ويرمز لها اختصاراً (MM). كما تم طرح دراسة جبرية (Heras et al., 2011, p. 8) انطلاقاً من التبولوجيا الجبرية، تم استخدام هذه الدراسة في تحليل الصور الرقمية وتطبيقها حاسوبياً باستخدام لغة ليسب (Lisp).

على الرغم من الإنجازات الكبيرة والمستمرة للباحثين الرياضيين في مجال معالجة الصورة الرقمية. لم نلاحظ دراسة متعمقة في إنشاء بنية جبرية خاصة بالصورة الرقمية، بما يتوافق وخواصها الفيزيائية والبرمجية. تكون أساساً جبرياً رياضياً في دراسة بنية الصورة الرقمية ومعالجتها.

قُسم البحث إلى خمسة أقسام. تُحدِث في القسم الثاني، بشكل مختصر عن فكرة البحث وأهدافه. أما في القسم الثالث فبدء بلمحة بسيطة عن الصورة الرقمية وبعض طرق المعالجة من الناحية الرياضية، ثم انتقل إلى تقديم الأسس التعريفية لبنية الصورة الرقمية، تلاها طرح البنية الجبرية الأساسية للصورة الرقمية وصولاً إلى عدد من المبرهنات والنتائج الرياضية والتي وضحت أهميتها من خلال مثال توضيحي. خُصص القسم الرابع لبيان أهمية النتائج التي حُصِل عليها. خُتمت هذه الورقة البحثية بالقسم الخامس لعرض الاستنتاجات التي حُصِل عليها وما يمكن العمل عليه مستقبلاً في هذا المسار.

2. فكرة البحث وأهدافه (Idea and objectives):

يتسم العصر الحالي بغزارة طرح الابتكارات والتقنيات المتطورة، كالروبوتات والسيارات ذاتية القيادة وما إلى ذلك من تقنيات حديثة تعتمد في جوهرها على زيادة فهم واستيعاب الآلة لما يجري في محيطها دون أي تدخل بشري، هو ما يطلق عليه مصطلح «رؤية الحاسوب». هذه الرؤية لم ولن تتم دون توفر الأدوات الرياضية المناسبة لذلك، والتي تقوم بتحويل بيانات الصورة الرقمية إلى

مجموعة من المعلومات الرياضية والمنطقية، تُمكن الحاسوب من فهمها. يدفع ذلك للتفكير والعمل المستمر للتوسع بالمفاهيم الرياضية وبخاصة الجبرية؛ للوصول إلى بنية جبرية تقوم بتوصيف محتويات الصورة الرقمية.

تم العمل سابقاً على تقسيم نقاط الصورة الرقمية إلى مجموعة عناصر وفق مقاربة جبرية. يُسعى في هذا البحث إلى استنتاج مجموعة من العلاقات الرياضية، والتي تربط بين هذه العناصر، وفق سلسلة من النتائج والمبرهنات. بذلك يكون لدينا بنية جبرية تصف مكونات ومحتويات الصورة الرقمية.

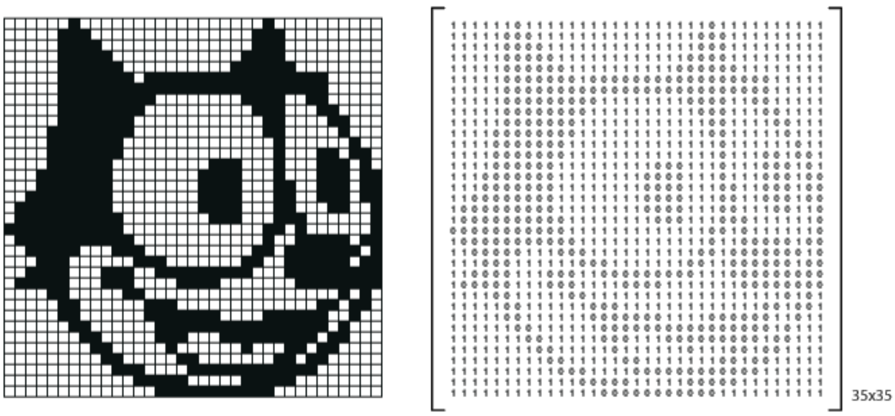
3. مواد وطرق البحث (Materials and methods):

3−1− تمهيد:

3−1−1− الصورة الرقمية: (Chandra, 2015, p. 5)

هي تمثيل لصورة ثنائية البعد على شكل مصفوفة من المربعات الصغيرة. كل صورة تتكون من ألاف أو ملايين المربعات الصغيرة والتي ندعو كل منها بيكسل[1] (Pixel).

مثلاً، يمكن تمثيل الصورة الصغيرة للقط فيليكس (Felix) في الشكل (1) بمصفوفة بعداها 35×35 عناصرها تتشكل من العددين 0 و1. كل عنصر يشير إلى لون البيكسل. يأخذ القيمة (0) من أجل البيكسل الأسود والقيمة (1) من أجل البيكسل الأبيض. علماً أن الصور الرقمية التي تستعمل لونين تسمى صور ثنائية أو بوليانية (نسبةً إلى الرياضي Boole).



(a) (b)

الشكل (1): (a) صورة القط فيلكس. (b) المصفوفة المُمثلة لصورة القط فيليكس.

يتم تمثيل الصورة ذات تدريجات اللون الرمادي من خلال مصفوفة، كل عنصر من هذه المصفوفة يحدد شدة البيكسل الموافق له. ولأسباب عملية فإن أغلب الملفات الرقمية الحالية تستعمل أعداداً صحيحة محصورة بين 0 (للبيكسل ذي اللون الأسود، لون بِشدّة دنيا) و255 (للبيكسل ذي اللون الأبيض، لون بِشدّة عظمى).

3−2− البنية الجبرية المقترحة في معالجة الصور الرقمية:

3−2−1− عناصر الصورة الرقمية: (Bakro et al., 2019, p. 16)

تعريف (3−1): (Bakro et al., 2019, p. 16)

لتكن (M) مصفوفة الصورة الرقمية (I)، نعرف المجموعة E_M بأنها مجموعة عناصر المصفوفة (M) والتي تم تعريفها في **(Bakro et al., 2019, p. 16)**

كما يوجد نوعين من العناصر غير الخالية:

- **النوع الأول:** سلسلة مغلقة من الحواف تحصر بداخلها مجموعة غير خالية من النقاط، يدعى **عنصراً بسيطاً**.

[1] هو أصغر عنصر بياني لصورة مصفوفية، يأخذ لوناً واحداً فقط.

- **النوع الثاني:** سلسلتان مغلقتان أو أكثر من الحواف غير المتقاطعة تحصر فيما بينها مجموعة غير خالية من النقاط، يدعى **عنصراً مركباً**.

يدعى العنصر البسيط والذي لا يحوي أي عنصر بداخله **بالعنصر الأولي**. كما أن كل عنصر من عناصر الصورة الرقمية مرتبط بدرجة، بالاعتماد على عدد العناصر الأولية التي يحتويها. العنصر Y من الدرجة x، يحوي على x عنصر أولي بداخله، بالتالي Y ينتمي إلى مجموعة العناصر ذات الدرجة xويرمز لها بالرمز R^x، ويكون لدينا $R(Y) = x$، و R^0 تحوي مجموعة العناصر الأولية وتقاطع أي عنصرين من المجموعة R^0 يساوي $\emptyset$.

ملاحظة (3−1):

نرمز للعناصر داخل الصورة الرقمية (المحتواة تماماً في المجموعة المدروسة) بالرموز $(X, Y, Z, \ldots)$ ما لم نذكر خلاف ذلك.

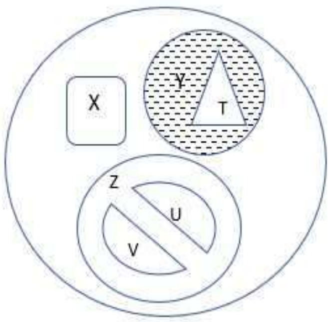
مثال (3−1):

لتكن الصورة الرقمية I، كما في الشكل (2) فيكون لدينا:

$X \in R^0$: عنصر بسيط، وهو عنصر أولي (لا يحوي أي عنصر).

$Y \in R^1$: عنصر بسيط، وهو ليس عنصر أولي كونه يحوي عنصر T $(T \in R^0)$. الجزء المظلل من Y هو عنصر مركب.

$Z \in R^2$: عنصر بسيط من الدرجة الثانية (يحوي بداخله عنصران أوليان $(U, V$).



الشكل (2): الصورة الرقمية I في المثال السابق (3−1).

3−2−2− البنية الجبرية للصورة الرقمية:

تم تعريف العملية الثنائية $\boxplus$ (Bakro et al., 2019, p. 16) على مجموعة العناصر E_M، وفق الشكل التالي:

$$\forall \; X, Y \in E_M \Longrightarrow X \boxplus Y = Z$$

حيث Z أصغر عنصر (مجموعة جزئية من المصفوفة M) يحوي معاً كل من المجموعتين X, Y .

كما أن العملية $\boxplus$ هي عملية تجميعية وتبديلية.

كما عُرفت علاقة الترتيب $\preceq$ على E_M وفق الشكل التالي:

$$\forall \; X, Y \in E_M \Rightarrow (X \preceq Y \;\Leftrightarrow \exists \, Z \in E_M : X \boxplus Z = Y) \qquad \textbf{(1)}$$

كما تم التحقق من العلاقات التالية: (Bakro et al., 2019, p. 16)

1− $Y \boxplus X \succeq X, Y$

2− $X \succeq \emptyset$ (العنصر $\emptyset$ الأصغري لعلاقة الترتيب $\preceq$)

3− $X \boxplus Y = \emptyset \;\Rightarrow\; X = Y = \emptyset$

تعريف (3−2): (Bakro et al., 2019, p. 16)

نرمز لعملية الاختزال بين عناصر الصورة الرقمية بالرمز $\boxminus$ بحيث $(X \boxminus Y)$ تمثل ما تبقى من X بعد اقتطاع Y من X .

تعريف (3−3): (Bakro et al., 2019, p. 16)

من أجل كل عنصر W من E_M لدينا المجموعة $E_{M(W)}$ المعرفة وفق الشكل التالي:

$$E_{M(W)} = \{X ; X \in E_M \,\&\, X \leq W\}$$

وكل عنصر W مرتبط بنصف زمرة واحدية تبديلية (مونؤيد تبديلي):

$$E_{M(W)} = (E_{M(W)}, ⊞, \emptyset)$$

ملاحظة (3−2):

بشكل أساسي تعتمد دراستنا الحالية على المبرهنات التي تم اثباتها في (Bakro et al., 2019). نذكر المبرهنات بشكل مختصر وفق الشكل التالي:

مبرهنة (3−1): (Bakro et al., 2019, p. 16)

ليكن لدينا $X \in E_{M(W)}$ فإن: $E_{M(X)} \subseteq E_{M(W)}$

مبرهنة (3−2): (Bakro et al., 2019, p. 16)

ليكن لدينا العملية الثنائية ⊟ المعرفة على المجموعة $E_{M(W)}$ ، تحقق العلاقة التالية:

$$[X ⊞ Y \geq Z] \;\Leftrightarrow\; [X \geq Z ⊟ Y] \qquad \textbf{(2)}$$

عندئذ يكون من أجل كل $X, Y, Z, X', Y' \in E_{M(W)}$ الخواص التالية محققة:

{1}− $X ⊟ X = \emptyset$

{2}− $(X ⊞ Y) ⊟ Y \leq X$

{3}− $(X ⊟ \mathrm{Y}) ⊞ Y \geq X, \mathrm{Y}$

{4}− $X ⊟ (X ⊟ \mathrm{Y}) \leq X, Y$

{5}− $[(X \leq X') \wedge (Y \leq Y')] \Rightarrow [(X ⊞ Y \leq X' ⊞ Y') \wedge (X ⊟ Y' \leq X' ⊟ Y)]$

مبرهنة (3−3): (Bakro et al., 2019, p. 16)

لتكن ⊟ عملية الاختزال الثنائية والمعرفة على المجموعة $E_{M(W)}$ والتي تحقق الخاصية (2)، فإن العنصر: $(X ⊟ \mathrm{Y}) ⊞ Y$ هو أصغر حد أعلى $(X \cup Y)$ لكل من العنصرين X، Y.

مبرهنة (3−4): (Bakro et al., 2019, p. 16)

لتكن ⊟ عملية الاختزال الثنائية والمعرفة على المجموعة $E_{M(W)}$ والتي تحقق الخاصية (2)، فإن:

$$X \geq Y \quad \Rightarrow \quad X = (X ⊟ Y) ⊞ Y$$

مبرهنة (3−5):

لتكن ⊟ عملية الاختزال الثنائية والمعرفة على المجموعة $E_{M(W)}$ والتي تحقق الخاصية (2)، بالتالي يتحقق ما يلي:

{1}− $X \leq Y \;\Leftrightarrow\; X ⊟ Y = \emptyset$

{2}− $X ⊟ \emptyset = X$

{3}− $\emptyset ⊟ X = \emptyset$

{4}− $X ⊟ Y \leq X$

الإثبات:

{1}− لدينا: $\emptyset \leq X ⊟ Y$

بما أن: $[X \leq Y]$ بالتالي «حسب المبرهنة (3−2) {5}»

$$X ⊟ Y \leq X ⊟ X$$

$$X ⊟ Y \leq \emptyset$$

إذن: $X ⊟ Y = \emptyset$

{2}− بما أن: $X = X ⊞ \emptyset$

فيكون لدينا: $X \preceq X \boxplus \emptyset$

بالتالي حسب (2) يكون: $X \boxminus \emptyset \preceq X$

من جهة اخرى: «حسب المبرهنة (3−2) {3}»:

$$(X \boxminus \emptyset) \boxplus \emptyset \succeq X$$

أي أن:

$$(X \boxminus \emptyset) \succeq X$$

مما سبق نجد:

$$X \boxminus \emptyset = X$$

{3}− يمكن الاستنتاج مباشرة من {1} وبما أن $\emptyset \preceq X$

{4}− بما أن: $\emptyset \preceq Y$

فإن: $X \boxminus Y \preceq X \boxminus \emptyset$ «حسب المبرهنة (3−2) {5}»

إذن: $X \boxminus Y \preceq X$ «حسب {2}»

توضيح: من المهم اثناء تشكيل البنية الجبرية للصورة الرقمية أن تكون عمليتي الإضافة والاختزال لا تتناقضان مع مفهوم الترتيب الرياضي؛ لذلك نعرف البنية الجبرية الأساسية وفق الشكل التالي:

تعريف (3−4):

لتكن M مصفوفة الصورة الرقمية I، نعرف **البنية الجبرية الأساسية للصورة الرقمية** I على إنها مونؤيد تبديلي مزود بعملية اختزال $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$ تحقق (1) و (2).

نتيجة (3−1): البنية الجبرية الأساسية الصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$، تحقق مايلي:

$X \preceq Y \Rightarrow X \boxplus Y = Y$ «بما أن $Y \preceq Y$ وحسب المبرهنة (3−2) {5}»

$X \boxplus Y = (X \boxminus Y) \boxplus Y$ «حسب المبرهنة (3−3)»

توضيح: من المهم دراسة تحقق وترابط الخواص الرياضية داخل بنية الصورة الرقمية، من أهمها تتالي عمليتي الإضافة والاختزال (أو العكس) كما في المورفولوجي الرياضي (الفتح والإغلاق) (Gonzalez & Woods, 2006, p. 977) والتي تعتبر من أهم العمليات المطبقة على محتويات الصورة الرقمية.

مبرهنة (3−6): البنية الجبرية الأساسية للصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$ والتي تحقق:

$$(Y \boxplus Z) \boxminus X = \Big((Y \boxminus X) \boxplus \big(Z \boxminus (X \boxminus Y)\big)\Big) \qquad \textbf{(3)}$$

فإنها تحقق ما يلي:

{1}− $[X \succeq Y \boxplus Z] \Leftrightarrow [X \succeq Y \ and \ X \boxminus Y \succeq Z]$ **(4)**

{2}− $(X \succeq Y) \Rightarrow ([X = Y \boxplus Z] \Leftrightarrow [X \boxminus Y = Z])$

{3}− $\Leftarrow \ [X \succeq Z] \ \& \ [X \succeq Y]$

أ− $[X \succeq Y \boxplus Z] \Leftrightarrow [X \boxminus Y \succeq Z] \Leftrightarrow [X \boxminus Z \succeq Y]$

ب− $[X = Y \boxplus Z] \Leftrightarrow [X \boxminus Y = Z] \Leftrightarrow [X \boxminus Z = Y]$

الإثبات:

{1} − بما أن **(2)** محققة وفق تعريف البنية الجبرية الأساسية للصورة الرقمية، فيكون لدينا:

$X \boxminus Y = \emptyset \Leftrightarrow Y \succeq X$ «حسب المبرهنة (3−5) {1}»

بالتالي يكون لدينا:

$$X \succeq Y \boxplus Z \Leftrightarrow (Y \boxplus Z) \boxminus X = \emptyset$$

$\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \quad \big((Y \boxminus X) \boxplus (Z \boxminus (X \boxminus Y))\big) = \emptyset$

$\Leftrightarrow \ (Y \boxminus X) = \emptyset \ and \ \big(Z \boxminus (X \boxminus Y)\big) = \emptyset$

«{1} (3−5) حسب المبرهنة» $\Leftrightarrow \quad [X \geq Y \ \ and \ \ X \boxminus Y \geq Z]$

{2}− يمكن الاستنتاج مباشرةً من {1} والعلاقة **(2)** المحققة في البنية الجبرية الأساسية للصورة الرقمية.

{3}− يمكن الاستنتاج مباشرةً من {1} و {2}.

مبرهنة (3−7): في البنية الجبرية الأساسية للصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$، يتحقق مايلي:

{1}− $\quad (X \boxminus Y) \boxminus Z = X \boxminus (Y \boxplus Z) = (X \boxminus Z) \boxminus Y \quad$ **(5)**

{2}− $\quad X \boxminus Y \geq (X \boxminus Z) \boxminus (Y \boxminus Z) \quad$ **(6)**

الإثبات:

− {1} $\quad (X \boxminus Y) \boxminus Z \leq \lambda \quad \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad X \boxminus Y \leq \lambda \boxplus Z$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad X \leq \lambda \boxplus Z \boxplus Y \quad$ ($\boxplus$ تبديلية وتجميعية)

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad X \boxminus (Y \boxplus Z) \leq \lambda$

بالتالي: $(X \boxminus Y) \boxminus Z = X \boxminus (Y \boxplus Z)$.

وبنفس الطريقة يتم اثبات: $(X \boxminus Y) \boxminus Z = (X \boxminus Z) \boxminus Y$.

{2} − لدينا من «المبرهنة (3−2) {3}» $(Y \boxminus Z) \boxplus Z \ \geq \ Y$، بالتالي حسب «المبرهنة (3−2) {5}» يكون لدينا:

$$X \boxminus Y \geq X \boxminus \big((Y \boxminus Z) \boxplus Z\big)$$

$$\geq X \boxminus \big(Z \boxplus (Y \boxminus Z)\big) \qquad (\boxplus \text{ تبديلية})$$

$$\overset{\{1\}}{\geq} (X \boxminus Z) \boxminus (Y \boxminus Z)$$

تعريف (3−5): نقول عن البنية الجبرية الأساسية للصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$ إنها تمثل **جبر**، إذا تحقق:

$$(X \boxplus Y = X \boxplus Z) \ \Rightarrow \ (Y = Z) \qquad \textbf{(7)}$$

<u>**بمعنى آخر**</u>: جبر الصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$ هو مونوئيد تبديلي مزود بعملية اختزال، يحقق:

- $X \geq Y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, Z: \quad X = Y \boxplus Z$
- $[X \boxplus Y \geq Z] \quad \Leftrightarrow \quad [X \geq Z \boxminus Y]$
- $(X \boxplus Y = X \boxplus Z) \ \Rightarrow \ (Y = Z)$

مبرهنة (3−8): في جبر الصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$ أكبر حد أدنى للعنصرين X, Y هو:

$$X \cap Y = X \boxminus (X \boxminus Y)$$

الإثبات:

لدينا: $X \boxminus (X \boxminus Y) \leq X, Y \qquad$ «حسب المبرهنة (3−2) {4}»

ليكن Z أي حد أدنى لـ $X, Y \quad \Leftarrow \quad Z \leq X, Y$

«حسب المبرهنة (3−2) {5}» $\quad X \boxminus Y \leq X \boxminus Z$

«حسب المبرهنة (3−2) {5}» $\quad (X \boxminus Y) \boxplus Z \leq (X \boxminus Z) \boxplus Z$

حسب» النتيجة $(3-1)$« $\quad (X \boxminus Y) \boxplus Z \leq X \boxplus Z$

حسب» النتيجة $(3-1)$ & $(Z \leq X)$« $\quad (X \boxminus Y) \boxplus Z \leq X \quad$ **(*)**

$\big((X \boxplus Y) \boxminus Y\big) \boxplus Y = X \boxplus Y$

«حسب المبرهنة (3−4)»

$\overset{(7)}{\Leftarrow} \quad (X \boxplus Y) \boxminus Y = X \quad$ **(8)**

بالتالي حسب (*) و **(8)**:

$$Z = \big(Z \boxplus (X \boxminus Y)\big) \boxminus (X \boxminus Y)$$
$$= (\,(X \boxminus Y) \boxplus Z) \boxminus (X \boxminus Y) \preceq X \boxminus (X \boxminus Y)$$

مبرهنة (3−9): في جبر الصورة الرقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$، يتحقق مايلي:

{1}− $[X \succeq Y] \;\Leftarrow$

أ− $[X \boxminus Y \succeq Z] \;\Leftrightarrow\; [X \succeq Y \boxplus Z]$

ب− $[X \boxminus Y = Z] \;\Leftrightarrow\; [X = Y \boxplus Z]$

{2}− $[X \succeq Y] \;\&\; [X \succeq Z] \;\Leftarrow$

أ− $[X \boxminus Z \succeq Y] \;\Leftrightarrow\; [X \boxminus Y \succeq Z] \;\Leftrightarrow\; [X \succeq Y \boxplus Z]$

ب− $[X \boxminus Z = Y] \;\Leftrightarrow\; [X \boxminus Y = Z] \;\Leftrightarrow\; [X = Y \boxplus Z]$

{3}− $[Y = (X \cup Y) \boxminus (X \boxminus Y)] \;\&\; [X \boxminus Y = (X \cup Y) \boxminus Y]$

{4}− $[Y \boxminus X = Y \boxminus (X \cap Y)] \;\&\; [Y = (X \cap Y) \boxplus (Y \boxminus X)]$

الإثبات:

{1} - (أ): $[X \succeq Y \boxplus Z] \;\Leftarrow\; \left[X \boxminus Y \succeq (Z \boxplus Y) \boxminus Y \overset{(8)}{=} Z\right]$

$[X \succeq Y] \;\xLongrightarrow{\text{«مبرهنة}(3-4)\text{»}}\; [X = (\,X \boxminus Y\,) \boxplus Y]$

$\xLongleftarrow{[X \boxminus Y \succeq Z]} \; [X \succeq Z \boxplus Y]$

{1} - (ب): $[X \boxminus Y \succeq Z] \;\Leftrightarrow\; [X \succeq Y \boxplus Z]$ «حسب (أ)»

$[Z \succeq X \boxminus Y] \;\Leftrightarrow\; [Y \boxplus Z \succeq X]$ «جبر الصورة الرقمية»

{2}− يمكن الاستنتاج مباشرةً من {1}.

{3}− يتم البرهان مباشرةً بالاعتماد على {2}(ب) ، حيث:

$[X \cup Y \succeq Y]\,,\; [X \cup Y \succeq X \succeq X \boxminus Y]\,,\; [X \cup Y = (X \boxminus Y) \boxplus Y]$

{4}− بسهولة يمكن إثبات ذلك من خلال {2}(ب) ، وبالاعتماد على:

$[Y \succeq Y \boxminus X] \;,\; [Y \succeq X \cap Y] \;,\; [X \cap Y = Y \boxminus (Y \boxminus X)]$

مبرهنة (3−10): الشروط التالية متكافئة في أي جبر صورة رقمية:

{1}− $(Y \boxplus Z) \boxminus X = \Big((Y \boxminus X) \boxplus \big(Z \boxminus (X \boxminus Y)\big)\Big)$ **(3)**

{2}− $Z \boxminus (X \boxminus Y) = \big((Y \boxplus Z) \boxminus X\big) \boxminus (Y \boxminus X)$

{3}− $[(Y \boxplus Z) \boxminus X] \boxminus [Z \boxminus (X \boxminus Y)] = Y \boxminus X$

الإثبات:

بفرض أن:

$$\left[\alpha = (Y \boxplus Z) \boxminus X\right] \,,\; [\beta = Y \boxminus X] \,,\, [\,\gamma = Z \boxminus (X \boxminus Y)]$$

ولدينا:

$$(Y \boxplus Z) \boxminus X \succeq^{(6)} \big((Y \boxplus Z) \boxminus Y\big) \boxminus (X \boxminus Y) \overset{(8)}{=} Z \boxminus (X \boxminus Y)$$

إذن: $\alpha \succeq \gamma$

أيضاً: $\alpha \succeq \beta$ «حسب المبرهنة (3−2) {5}»

بالتالي وفق «المبرهنة (3−9) {2} (ب)» نجد:

$$\left[\alpha = \beta \boxplus \gamma\right] \;\Leftrightarrow\; \left[\alpha \boxminus \beta = \gamma\right] \;\Leftrightarrow\; \left[\alpha \boxminus \gamma = \beta\right]$$

مبرهنة (3−11): في جبر الصورة الرقمية، يكون لدينا:

{1}− $[Y \succeq Z] \;\Rightarrow\; [X \boxplus (Y \boxminus Z) = (X \boxplus Y) \boxminus Z]$

{2}− $[Z \succeq Y] \;\Rightarrow\; [(X \boxplus Y) \boxminus Z = X \boxminus (Z \boxminus Y)]$

الإثبات:

{1} - لدينا حسب **(8)**:

$$X \boxplus (Y \boxminus Z) = \big((X \boxplus (Y \boxminus Z)) \boxplus Z\big) \boxminus Z$$

ولدينا حسب «المبرهنة (3−4)»: $[Y \succeq Z] \Leftarrow [(Y \boxminus Z) \boxplus Z = Y]$

بالتالي: $[Y \succeq Z] \Rightarrow [X \boxplus (Y \boxminus Z) = (X \boxplus Y) \boxminus Z]$

{2} - بما أن $[Z \succeq Y] \Leftarrow [Z \boxminus (Z \boxminus Y) = Z \cap Y = Y]$ بالتالي:

$$X \boxplus Y = X \boxplus \big(Z \boxminus (Z \boxminus Y)\big) \overset{\{1\}}{=} (X \boxplus Z) \boxminus (Z \boxminus Y)$$

إذن:

$$(X \boxplus Y) \boxminus Z = \big((X \boxplus Z) \boxminus (Z \boxminus Y)\big) \boxminus Z \overset{(5)}{=} \big((X \boxplus Z) \boxminus Z\big) \boxminus (Z \boxminus Y) \overset{(8)}{=} X \boxminus (Z \boxminus Y)$$

مبرهنة (3−12): في أي جبر الصورة الرقمية، المساواة التالية محققة:

$$Z \boxminus (X \boxminus Y) = \big((Y \boxplus Z) \boxminus X\big) \boxminus (Y \boxminus X)$$

الإثبات:

$$\big((Y \boxplus Z) \boxminus X\big) \boxminus (Y \boxminus X) =$$

«المبرهنة (3 − 9) {4}» $= \big[(Y \boxplus Z) \boxminus \big((X \cap Y) \boxplus (X \boxminus Y)\big)\big] \boxminus (Y \boxminus X) \overset{(5)}{=} \big[\big((Y \boxplus Z) \boxminus (X \cap Y)\big) \boxminus (X \boxminus Y)\big] \boxminus (Y \boxminus X)$

$$= \big[\big(Z \boxplus (Y \boxminus (X \cap Y)\big) \boxminus (X \boxminus Y)\big] \boxminus (Y \boxminus X)$$

المساواة الأخيرة من خلال المبرهنة» (3 − 11) {1}« حيث: $Y \succeq X \cap Y$

«المبرهنة» (3 − 9) {4}» $= \big[\big(Z \boxplus (Y \boxminus X)\big) \boxminus (X \boxminus Y)\big] \boxminus (Y \boxminus X)$

$$\overset{(5)}{=} \big[\big(Z \boxplus (Y \boxminus X)\big) \boxminus (Y \boxminus X)\big] \boxminus (X \boxminus Y)$$

$$\overset{(8)}{=} Z \boxminus (X \boxminus Y)$$

نتيجة (3−2): نستنتج من «المبرهنة (3−10)» و«المبرهنة (3−12)»، أن:

أي جبر صورة رقمية $(E_M, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$ يتحقق فيه مايلي:

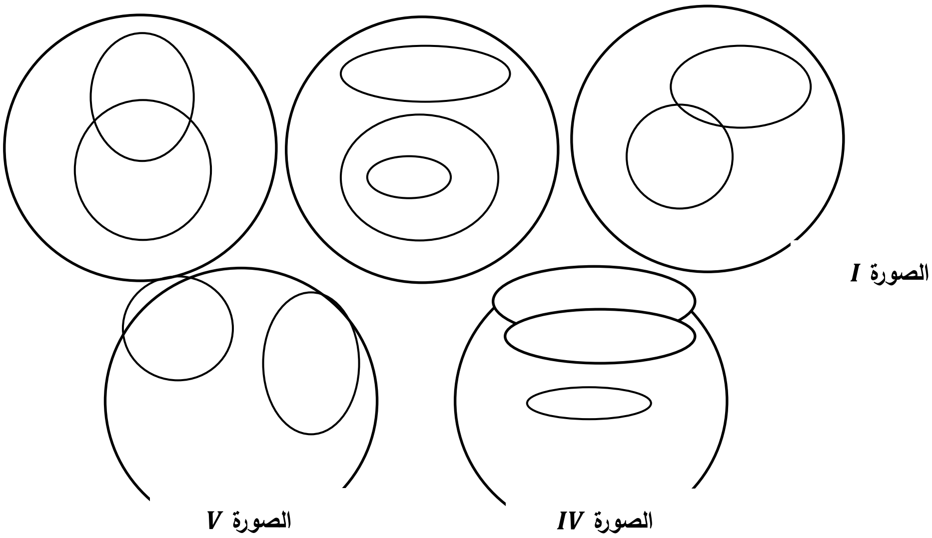
$$(Y \boxplus Z) \boxminus X = (Y \boxminus X) \boxplus (Z \boxminus (X \boxminus Y)$$

توضيح: إن دراسة الخواص الجبرية لتتالي تطبيق عمليتي الإضافة والاختزال (أو العكس) تعتبر بالتأكيد تمهيداً مهماً لتعريف قانون تشكيل خارجي على عناصر الصورة الرقمية والتي تجري على سبيل المثال أثناء عملية تنقية الصورة الرقمية من خلال ضرب عناصر الصورة الرقمية بعنصر خارجي (مرشح).

ملاحظة (3−3):

خلال ما سبق تم تحويل الصورة الرقمية من بيانات غير مهيكلة، إلى مجموعة عناصر وبيانات رياضية. كما تم تعريف بعض العمليات الرياضية على هذه العناصر. نتيجة ذلك تُوصِل إلى مجموعة من النتائج والمبرهنات الرياضية، والمثال (3−2) يوضح أهمية ما تم توفيره من أدوات رياضية لاستخلاص المعلومات من داخل الصور الرقمية، مما يسهم في تصنيف وتوزيع الصور الرقمية إلى صفوف أو مجموعات من الصور المتشابهة وفق معايير وعمليات رياضية مُطبقة على عناصر الصور الرقمية.

مثال (3−2): ليكن لدينا الصور الرقمية الموضحة بالشكل (3):



الشكل (3): صور رقمية، المثال السابق (3−2).

باستخدام ما تُوصل إليه من نتائج وانطلاقاً من فكرة تقسيم الصورة الرقمية إلى مجموعة من العناصر باستخدام طريقة تحديد الحواف، يمكن مباشرة استخلاص المعلومات التالية:

كل من الصورة الرقمية I, II, V عبارة عن عنصر بسيط من الدرجة 2، وكل من الصورة الرقمية III, IV عبارة عن عنصر بسيط من الدرجة 3.

يمكن تصنيف جميع الصور في الشكل (3) إلى:

أ− الصور التي تحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2. (I, II, V)

ب− الصور التي لا تحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2. (III, IV)

بمرحلة ثانية، ومن خلال إجراء عملية الإضافة على عناصر الصورة الرقمية. يمكن تقسيم مجموعة الصور إلى تصنيفات أكثر دقة. فيكون لدينا:

أ− الصور التي تحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2 ومجموع أي عنصرين فيه، يساويه. (I, V)

ب− الصور التي تحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2 ومجموع أي عنصرين فيه، لا يساويه. (II)

ت− الصور التي لا تحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2. (III, IV)

بالتالي كلما زادت العمليات الرياضية المطبقة على عناصر الصور الرقمية كلما يُستطاع توزيع الصور المدروسة إلى عدد أكبر من المجموعات، يؤدي ذلك إلى تصنيفها وتوصيفها بشكل أدق. بذلك تَظهر أهمية المبرهنات والعمليات الرياضية المعرفة على عناصر الصور الرقمية في فلترة الصور الرقمية وتوزيعها إلى صفوف تشابه أو تطابق والتي هي الحجر الأساس في محركات البحث في إيجاد مشابهات الصور والتي تحوي على المعلومات المستخلصة ذاتها.

مناقشة (3−1):

من النتيجة (3−1) ومن العلاقة (7) نستنتج:

أي جبر صورة رقمية $(E_{M(W)}, \boxplus, \boxminus, \emptyset)$، يحقق:

$$\forall X, Y \in E_{M(W)} \;\Rightarrow\; X = X \boxminus Y$$

بالتالي أي تقاطع بين عنصرين من عناصر الصورة الرقمية $E_{M(W)}$ يؤدي لنتيجة $(E_{M(W)}, ⊞, ⊟, \emptyset)$ لا تمثل جبراً وفق التعريف $(3-5)$. تأسيساً على ما سبق وبالعودة إلى الشكل (3) نلاحظ أن الصورتين III, II لا تشكل جبراً. بتطبيق ما سبق يمكن تقسيم مجموعة الصور بالشكل (3) إلى مزيد من المجموعات، والحصول على تصنيفات أكثر دقة:

أ- الصور التي تشكل جبراً وتحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2 ومجموع أي عنصرين فيه، يساويه. (I, V)

ب- الصور التي لا تشكل جبراً وتحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2 ومجموع أي عنصرين فيه، لا يساويه. (II)

ت- الصور التي تشكل جبراً ولا تحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2. (IV)

ث- الصور التي لا تشكل جبراً ولا تحوي على عنصر بسيط من الدرجة 2. (III)

هنا تتبين أهمية الاستمرار بالدراسات الجبرية في إيجاد صيغ وعلاقات رياضية، تقسم الصور المدروسة إلى مزيد من المجموعات ذات الصفات الرياضية المشتركة، ويمكن تطبيقياً الاستفادة من الشبكات العصبونية لتشكل خوارزميات تصنيف وفق العلاقات والنتائج الرياضية الجديدة التي تُوصِل لها.

4. النتائج ومناقشتها (Results and discussion):

ختاماً، لابد من تسليط الضوء سريعاً على ما قُدم ضمن هذه الأوراق البحثية، حيث قدمت بنية جبرية للصورة الرقمية بالاعتماد على الطرح السابق في تقسيم الصورة الرقمية لمجموعة من العناصر. توصل من خلالها إلى عدد من المبرهنات والنتائج الرياضية للربط والمقارنة بين هذه العناصر. يأتي هذا العمل في إطار تبسيط وتجريد مكونات الصورة الرقمية مما يسهل العمل في معالجتها.

5. الاستنتاجات والتوصيات (Conclusions and further work):

لوحظ عند إنشاء البنية الجبرية الخاصة بالصورة الرقمية، تمكنها من التوصيف الرياضي لمحتويات الصورة الرقمية، كما قدمت طريقة لتصنيف مكوناتها ضمن صفوف تكافؤ، بناءً على عدد من العلاقات والمبرهنات الرياضية التي تربط وتنظم تفاعل العناصر داخل الصورة الرقمية. والتي يمكن الاستفادة منها مباشرة في تطبيقات الرؤية الحاسوبية كإدراك ومقارنة الصور الرقمية.

مستقبلاً، وانطلاقاً من هذا البحث، يمكن إتمام العمل في اتجاهين مختلفين:

الأول (الاتجاه النظري):

تكملة ما بدأناه في تكوين البنية الجبرية الخاصة بمعالجة الصورة الرقمية. للوصول إلى المزيد من النتائج والمبرهنات الرياضية. في سياق ذلك يمكن الاستفادة من المفاهيم النتروسوفكية، للوصول الى بنية جبرية نتروسوفكية للصورة الرقمية.

الثاني (الاتجاه التطبيقي):

العمل على تجريد المشكلات التطبيقية في معالجة الصورة الرقمية، وفق الأسس والتعريفات المطروحة في هذا البحث، والاستفادة من النتائج التي حُصِل عليها في حل هذه المشاكل.

المراجع (References):

1. Bakro, M., Al-Kamha, R., & Kanafani, Q. (2019). The Algebraic Representation of Digital Image Elements. *AL-Baath University journal, 41*, 16.
2. Bakro, M., Al-Kamha, R., Kanafani, Q. J. N. S., & Systems. (2020). A Neutrosophic Approach to Digital Images. *36*(1), 2.
3. Bakro, M., Al-Kamha, R., Kanafani, Q. J. N. S., & Systems. (2021). Neutrosophication Functions and their Implementation by MATLAB Program. *40*(1), 10.
4. Chandra, V. (2015). Application of Matrix in Image Compression. *Bandung Institute of Technology*.
5. Gonzalez, R., & Woods, R. (2006). Digital Image Processing Prentice. Hall.
6. Heras, J., Pascual, V., & Rubio, J. (2011). A certified module to study digital images with the Kenzo system. (Ed.),^(Eds.). International Conference on Computer Aided Systems Theory.
7. Serra, J., & Soille, P. (2012). *Mathematical morphology and its applications to image processing* (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
8. Wilson, J. N., & Ritter, G. X. (2000). *Handbook of computer vision algorithms in image algebra*. CRC press.